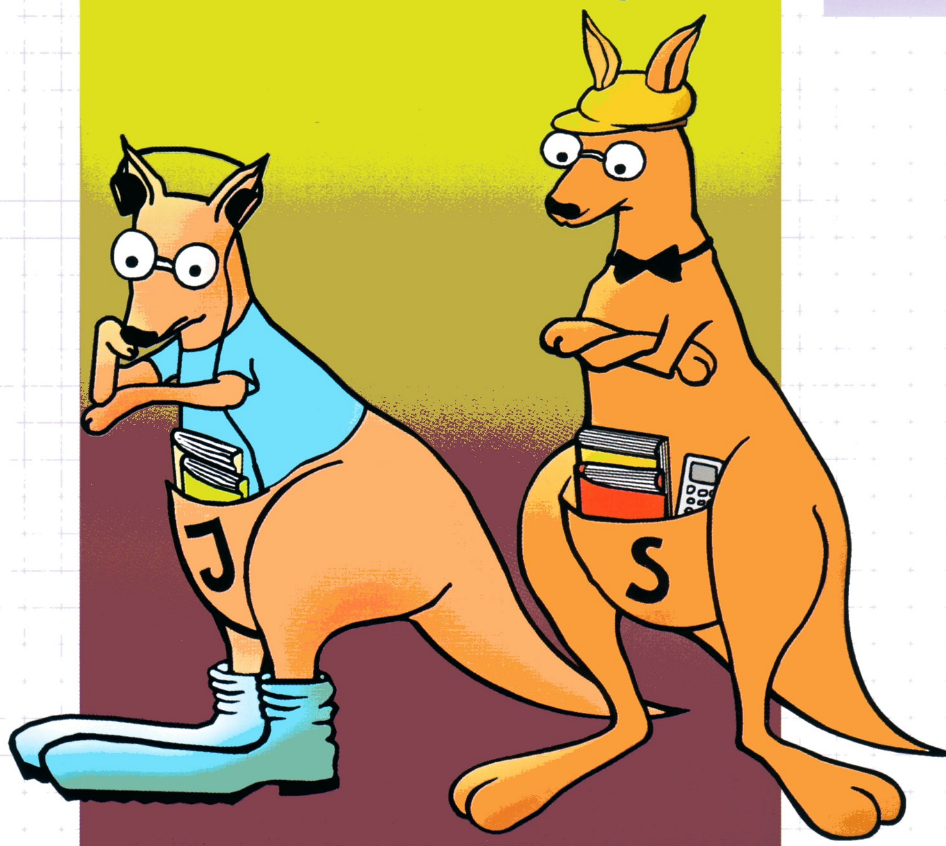
KENGŪRA 2012

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS
KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

IX–XII KLASĖS



КЕНГУРУ 2012
KANGUR 2012
KANGAROO 2012

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2012

JUNIORAS, SENJORAS

IX–XII KLASĖS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS K O N K U R S O UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius-sudarytojas ***AIVARAS NOVIKAS***

TEV

VILNIUS 2012

UDK 51(079.1)
Ke–108

Autorius-sudarytojas *Aivaras Novikas*

Redaktorius *Arūnas Ūsaitis*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Aldona Žalienė*
Konsultantas *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

ISBN 978–609–433–192–3

TURINYS

PRATARMĖ

Paprastai žiūrint, „Kengūros“ konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į „Kengūros“ kalnelius? Kuo tie „Kengūros“ kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje „pramogų gadynėje“.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali „užsikabinti“ pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne — tai sužinojo) per 58 000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2012 metais. Juk konkursas — it žavus tornadas (o tokių irgi būna) — negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas — žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių — 1–12 klasių „kengūriukų“ — atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi — priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį — bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi „Kengūros“ konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes „Kengūros“ uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą — peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali „sukristi“ jos sprendimas — štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš „Kengūros“ gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė „Kengūrai“ ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie „Kengūros“ konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą „Kengūros“ konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti — čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru — Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, „Kengūrai“ nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir „Kengūros“ ratas sukasi kiaurus metus — net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek „kengūriniuose“ (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje „Kengūra“ kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas — juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku — bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2012 metų kovo 15 dieną keliavo ir gausiai sprendė IX–X klasių („Junioro“ amžiaus grupė) ir XI–XII klasių („Senjoro“ amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų „kengūriniai“ sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su „Kengūra“ — išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba ir Aivaras Novikas

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Maksim Bovarov, Naujamiesčio vidurinė mokykla, Vilniaus m., 124,75
Emilijus Stankus, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 113,50
Povilas Šlekys, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 113,50
Domantas Jadenkus, Grigiškių „Šviesos“ gimnazija, Vilniaus m., 108,75
Greta Jeskelevičiūtė, Veprių vidurinė mokykla, Ukmergės r., 108,50
Miglė Kalinauskaitė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 108,50
Gediminas Usevičius, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 104,25
Augustas Janulevičius, VšĮ Kauno „Vyturio“ katalikiškoji vidurinė mokykla, Kauno m., 102,25
Paulius Ašvydis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 101,25
Simonas Janulevičius, VšĮ Kauno „Vyturio“ katalikiškoji vidurinė mokykla, Kauno m., 98,50
Pavel Mironov, Lazdynų vidurinė mokykla, Vilniaus m., 97,75
Maria Kamila Žygis, Maišiagalos kun. Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 97,50
Raimond Seniut, Kenos pagrindinė mokykla, Vilniaus r., 97,50
Mantas Pranskaitis, Stasio Šalkauskio gimnazija, Šiaulių m., 96,00
Eva Leonovič, Maišiagalos kun. Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 95,00
Meilė Petrauskaitė, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 94,75
Rokas Tomkevičius, VšĮ „Ąžuolo“ katalikiškoji vidurinė mokykla, Kauno m., 94,00
Faustina Dobrovolskytė, „Saulės“ gimnazija, Kauno m., 93,75
Evald Satkevič, Kenos pagrindinė mokykla, Vilniaus r., 93,75
Gytis Bernotavičius, Naujosios Akmenės Ramučių gimnazija, Akmenės r., 93,00
Emilija Linkauskaitė, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 92,50
Gražina Brazulevič, Maišiagalos kun. Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 92,50
Indrė Tuminauskaitė, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 92,50
Neda Maikštėnaitė, Marijampolės marijonų gimnazija, Marijampolės sav., 92,50
Vygintas Vytartas, Marijampolės Sūduvos gimnazija, Marijampolės sav., 92,50
Vaiva Soriūtė, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 92,25
Eivydas Račkauskas, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 92,00
Patricija Šapokaitė, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 92,00
Gytis Ramanauskas, Radviliškio Vaižganto gimnazija, Radviliškio r., 91,50
Mindaugas Dagilis, VšĮ Kretingos pranciškonų gimnazija, Kretingos r., 91,25
Rokas Morkūnas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 91,25
Adomas Juška, Jėzuitų gimnazija, Vilniaus m., 90,25
Adelė Stankevičiūtė, Žirmūnų gimnazija, Vilniaus m., 90,00
Andrius Švitra, Druskininkų „Ryto“ gimnazija, Druskininkų sav., 90,00
Marius Kluonis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 90,00
Algirdas Žiemys, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 89,25
Miglė Tartėnaitė, Vievio gimnazija, Elektrėnų sav., 89,25
Jonas Urbas, Marijampolės marijonų gimnazija, Marijampolės sav., 89,00
Lukas Verikas, Žirmūnų gimnazija, Vilniaus m., 89,00
Arvydas Dubickas, Obelių gimnazija, Rokiškio r., 88,75
Baltrus Šivickis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 88,75
Guoda Urbonaitė, Druskininkų „Ryto“ gimnazija, Druskininkų sav., 88,75
Irmantas Mankevičius, Tuskulėnų vidurinė mokykla, Vilniaus m., 88,75
Vaidotas Draugelis, VšĮ Kauno „Vyturio“ katalikiškoji vidurinė mokykla, Kauno m., 88,50
Alanas Plaščinskas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 88,25
Jonas Budrauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 88,25
Kamil Kuznecov, Sužionių vidurinė mokykla, Vilniaus r., 88,25
Ričardas Vižinis, Molėtų gimnazija, Molėtų r., 88,00
Andželika Ramanauskaitė, Jašiūnų „Aušros“ vidurinė mokykla, Šalčininkų r., 87,50
Justinas Kavoliūnas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 87,50
Katažyna Magun, Maišiagalos kun. Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 87,50

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Ignas Urbonavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 138,75
Jokūbas Ruibys, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 135,00
Mykolas Blažonis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 131,25
Justas Klimavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 130,00
Simonas Kireilis, Marijampolės marijonų gimnazija, Marijampolės sav., 130,00
Aidas Kilda, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 122,00
Lukas Jonuška, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 120,00
Mindaugas Narušis, Marijampolės Sūduvos gimnazija, Marijampolės sav., 120,00
Rita Norbutaitė, Laukuvos Norberto Vėliaus gimnazija, Šilalės r., 113,50
Lukas Bernotas, Jėzuitų gimnazija, Vilniaus m., 111,25
Mantas Pajarskas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 111,25
Matas Grigaliūnas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 111,25
Mindaugas Dadurkevičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 111,25
Daniel Juranec, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 111,00
Ugnius Beinorius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 111,00
Vytautas Šlenfuktas, Vilkaviškio „Aušros“ gimnazija, Vilkaviškio r., 108,50
Adomas Boruta, Jėzuitų gimnazija, Kauno m., 107,50
Mikas Dominas, VšĮ Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos“ gimnazija, Kauno m., 107,25
Lukas Aliuškevičius, Veprių vidurinė mokykla, Ukmergės r., 106,00
Roman Dmitrijev, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 105,75
Artur Spiridonov, Švenčionėlių antroji vidurinė mokykla, Švenčionių r., 105,00
Ugnius Viburys, Molėtų gimnazija, Molėtų r., 105,00
Lukas Šteinys, Adolfo Ramanausko-Vanago gimnazija, Alytaus m., 104,50
Julijonas Kikutis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 103,75
Andrej Bosiakov, „Aitvaro“ gimnazija, Klaipėdos m., 102,25
Algirdas Ramonas, Raudondvario gimnazija, Kauno r., 98,50
Džiugas Šmigelskis, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 98,50
Lukas Zizas, Karoliniškių gimnazija, Vilniaus m., 98,50
Audrius Malelė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 98,25
Justinas Babenskas, „Saulės“ gimnazija, Kauno m., 98,00
Ringaudas Kalinauskas, „Saulės“ gimnazija, Kauno m., 97,50
Martynas Pukys, VšĮ Kauno Juozo Urbšio katalikiškoji vidurinė mokykla, Kauno m., 95,75
Edvinas Gražys, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 93,75
Nerijus Stukas, Mykolo Biržiškos gimnazija, Vilniaus m., 93,75
Robert Prokopovič, Jašiūnų „Aušros“ vidurinė mokykla, Šalčininkų r., 93,75
Tadas Anužas, Raudondvario gimnazija, Kauno r., 93,75
Artur Gvozdovičius, Kenos pagrindinė mokykla, Vilniaus r., 93,75
Povilas Dainelis, Šakių „Žiburio“ gimnazija, Šakių r., 93,00
Justas Brazauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 92,75
Mantas Lazdauskas, Šakių „Žiburio“ gimnazija, Šakių r., 92,50
Paulina Stravinskaitė, Prienų „Revuonos“ vidurinė mokykla, Prienų r., 92,50
Aidas Liaudanskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 92,25
Domantas Matas Mozeris, Jėzuitų gimnazija, Vilniaus m., 92,25
Jurgis Balčiūnas, Žvėryno gimnazija, Vilniaus m., 92,00
Tadas Nutautas, VšĮ Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos“ gimnazija, Kauno m., 91,75
Gvidas Janušonis, Pasvalio Petro Vileišio gimnazija, Pasvalio r., 91,50
Dmitrij Knel, Lentvario 1-oji vidurinė mokykla, Trakų r., 91,25
Domas Vorobjevas, Tauragės „Versmės“ gimnazija, Tauragės r., 91,25
Tautvydas Ramanauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 91,25
Matas Vaitkus, Naujamiesčio vidurinė mokykla, Panevėžio r., 91,00

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Mariuš Voitkun, Rudaminos Ferdinando Ruščico gimnazija, Vilniaus r., 114,75
Žygimantas Stražnickas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 113,50
Gintas Kuncevičius, Mykolo Biržiškos gimnazija, Vilniaus m., 110,00
Aurelija Valantonytė, Karmėlavos Balio Buračo gimnazija, Kauno r., 109,25
Daumantas Kavolis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 108,75
Barbara Prokopovič, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 107,50
Esmiralda-Agata Trabutytė, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 107,50
Diana Vežbovič, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 107,25
Vytautas Pečiukėnas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 106,75
Irmantas Šermukšnis, Molėtų gimnazija, Molėtų r., 106,00
Valdas Stonys, Naujosios Akmenės Ramučių gimnazija, Akmenės r., 105,50
Simas Družas, Krekenavos Mykolo Antanaičio gimnazija, Panevėžio r., 102,75
Tomas Vaškevičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 101,50
Greta Jodko, „Šaltinėlio" privati mokykla, Vilniaus m., 101,25
Arnas Gerčas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 100,00
Rapolas Norvaiša, „Romuvos" gimnazija, Šiaulių m., 100,00
Vladimir Daglis, „Santaros" vidurinė mokykla, Vilniaus m., 100,00
Domas Nutautas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 99,75
Džiugas Vyšniauskas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 97,75
Mantas Kriščiūnas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 95,75
Jokūbas Surgailis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 95,50
Gražvydas Kazlauskas, „Romuvos" gimnazija, Šiaulių m., 95,00
Justas Žemgulys, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 94,50
Arnoldas Kairys, Baltijos gimnazija, Klaipėdos m., 94,00
Mantas Abazorius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 94,00
Martynas Šimkevičius, Baisogalos gimnazija, Radviliškio r., 93,75
Gabrielius Lukinskas, Pilaitės vidurinė mokykla, Vilniaus m., 93,50
Marius Latinis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 93,50
Kamilė Rastenytė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 93,00
Evaldas Kazlauskis, Stasio Šalkauskio gimnazija, Šiaulių m., 92,50
Arnas Augutis, Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija, Kretingos r., 92,25
Andrius Karužas, Juodšilių „Šilo" gimnazija, Vilniaus r., 91,25
Mykolas Jasponis, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 90,75
Rūta Jurgaitytė, Upynos Stasio Girėno vidurinė mokykla, Šilalės r., 90,00
Egidijus Bertulis, Žvėryno gimnazija, Vilniaus m., 89,75
Karolis Bartkus, „Aukuro" gimnazija, Klaipėdos m., 89,75
Lukas Klebonas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 89,50
Vaidotas Pėkis, Elektrėnų „Versmės" gimnazija, Elektrėnų sav., 89,25
Dalius Slavickas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 88,75
Lukas Strazdas, „Šaltinėlio" privati mokykla, Vilniaus m., 88,75
Dominykas Mikolaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 88,25
Karmela Blank, Šolomo Aleichemo vidurinė mokykla, Vilniaus m., 88,25
Mykolas Gustas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 88,25
Antanas Žilakauskis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 88,00
Rugilė Bendinskaitė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 87,75
Tadas Gvazdaitis, Jotvingių gimnazija, Alytaus m., 87,75
Ričardas Pilkauskas, Plutiškių vidurinė mokykla, Kazlų Rūdos sav., 87,50
Edgaras Simanavičius, Jurbarko Antano Giedraičio-Giedriaus gimnazija, Jurbarko r., 86,75
Mykolas Karpavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 86,75
Tomas Baškys, Stasio Šalkauskio gimnazija, Šiaulių m., 86,75

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Linas Klimavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 133,75
Miglė Stebrytė, Tuskulėnų vidurinė mokykla, Vilniaus m., 118,75
Justinas Česonis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 117,50
Marius Juozas Žvirblis, Užupio gimnazija, Vilniaus m., 115,75
Kęstutis Vilčinskas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 113,75
Ana Daglis, „Santaros" vidurinė mokykla, Vilniaus m., 112,50
Karolina Jankovska, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 112,25
Giedrius Sirevičius, Martyno Mažvydo vidurinė mokykla, Kauno m., 107,50
Jokūbas Žemaitaitis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 106,50
Edvinas Kurauskas, Martyno Mažvydo vidurinė mokykla, Kauno m., 106,25
Paulius Leonavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 105,00
Svajūnas Maksvytis, Martyno Mažvydo vidurinė mokykla, Kauno m., 105,00
Vytautas Radzevičius, Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija, Kretingos r., 104,25
Kęstutis Pajaujis, Martyno Mažvydo vidurinė mokykla, Kauno m., 103,75
Vigantė Kavaliauskaitė, Šiaulėnų Marcelino Šikšnio vidurinė mokykla, Radviliškio r., 103,50
Laurynas Čekanavičius, Jonavos Senamiesčio gimnazija, Jonavos r., 102,50
Saulė Dževečkaitė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 102,50
Tomaš Voinič, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 102,50
Karolis Leskauskas, Jotvingių gimnazija, Alytaus m., 102,00
Jekaterina Mironova, Lazdynų vidurinė mokykla, Vilniaus m., 100,25
Arnas Jonikas, Užupio gimnazija, Vilniaus m., 99,25
Julija Kazakevičiūtė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 98,25
Remigijus Kuokšta, Šiaulėnų Marcelino Šikšnio vidurinė mokykla, Radviliškio r., 98,25
Simonas Mamaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 98,25
Laura Papinigytė, „Šaltinėlio" privati mokykla, Vilniaus m., 97,50
Milena Graužytė, Druskininkų „Ryto" gimnazija, Druskininkų sav., 97,50
Žygimantas Butkus, Antano Smetonos gimnazija, Kauno m., 96,75
Darja Jevstafjeva, Naujamiesčio vidurinė mokykla, Vilniaus m., 96,25
Julijus Kurlavičius, Vasilijaus Kačialovo gimnazija, Vilniaus m., 95,75
Beatričė Zalbaitė, VšĮ Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos" gimnazija, Kauno m., 95,50
Denys Tsybulskyi, „Aitvaro" gimnazija, Klaipėdos m., 95,50
Ieva Ragelytė, Raudondvario gimnazija, Kauno r., 95,50
Pavel Belicyn, „Aitvaro" gimnazija, Klaipėdos m., 95,00
Dainius Kučinskas, Rietavo Lauryno Ivinskio gimnazija, Rietavo sav., 94,50
Vytautas Vargonas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 94,00
Justinas Šukys, Šiaulėnų Marcelino Šikšnio vidurinė mokykla, Radviliškio r., 92,50
Laimonas Ratkevičius, Šilutės Vydūno gimnazija, Šilutės r., 91,75
Artūras Bagdonas, Juliaus Janonio gimnazija, Šiaulių m., 91,25
Vytautas Simanaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 90,75
Paulius Sipavičius, Sidabravo vidurinė mokykla, Radviliškio r., 90,50
Tomas Zamaliauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 90,00
Emilis Mockevičius, Žemaičių Kalvarijos vidurinė mokykla, Plungės r., 89,75
Ričardas Kiškis, Šiaulėnų Marcelino Šikšnio vidurinė mokykla, Radviliškio r., 89,75
Kamile Marcinkevičiūtė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 89,50
Kristina Survilaitė, Krekenavos Mykolo Antanaičio gimnazija, Panevėžio r., 89,50
Mikalojus Poška, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 89,50
Kamilė Kelpšaitė, Šilutės pirmoji gimnazija, Šilutės r., 89,25
Irmantas Mogila, „Saulėtekio" gimnazija, Šiaulių m., 88,75
Mantas Minkauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 88,75
Andrius Žiukas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 88,50
Ignas Valiušis, Elektrėnų „Versmės" gimnazija, Elektrėnų sav., 88,50
Lukas Čibiras, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 88,50



Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą.*
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę.*

Pavyzdys: **Pavardė** **P A V A R D E N I S**

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: 

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
Klasė	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

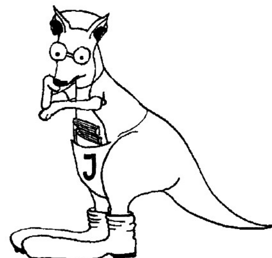
PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o už klaidingą atsakymą atimama 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Automatinis apdorojimas, Nacionalinis egzaminų centras, 2009

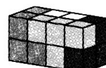
2012 m. konkurso užduočių sąlygos

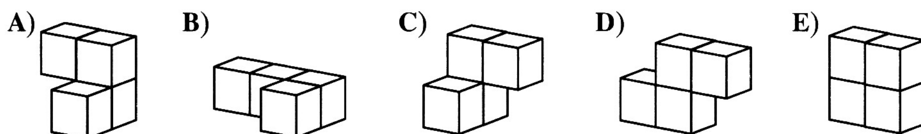
JUNIORAS (IX ir X klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

J1. Stačiakampis gretasienis sudėtas iš keturių detalių. Kiekviena detalė sudaryta iš keturių vienspalvių kubelių. Kokios formos yra baltoji detalė?

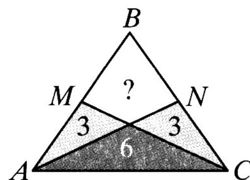




J2. $11{,}11 - 1{,}111 =$

A) 9,009 **B)** 9,0909 **C)** 9,99 **D)** 9,999 **E)** 10

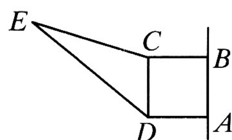
J3. Pavaizduotas trikampis ABC yra lygiašonis ($AB = BC$). Trikampio pusiaukraštinės AN ir CM padalija jį į 4 sritis. Paveikslėlyje užrašyti trijų sričių plotai. Kam lygus ketvirtosios srities plotas?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7



J4. Alytė siunčia Broniui šifruotus pranešimus, kiekvieną raidę pakeisdama jos eilės numeriu lietuviškoje abėcėlėje, padaugintu iš dviejų ir dar padidintu 9 vienetais. Šįryt Bronius gavo pranešimą 57–63–51–42–!. Ką sako pranešimas?

A) STOK! **B)** SUOK! **C)** SUPK! **D)** DUOK! **E)** Alytė suklydo

J5. Pavaizduotų kvadrato $ABCD$, kurio kraštinės ilgis yra 4 cm, ir trikampio CDE (žr. pav.) plotai yra lygūs. Kam lygus atstumas nuo taško E iki tiesės AB?
A) 8 cm **B)** $(4 + 2\sqrt{3})$ cm **C)** 12 cm **D)** $10\sqrt{2}$ cm
E) Jis priklauso nuo taško E parinkimo



J6. Septynių skaitmenų suma lygi 6. Kam lygi šių skaitmenų sandauga?

A) 0 **B)** 6 **C)** 7 **D)** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ **E)** 5

J7. Stačiojo trikampio ABC statiniai lygūs 6 cm ir 8 cm. Taškai K, L ir M yra trikampio kraštinių vidurio taškai. Kam lygus trikampio KLM perimetras?

A) 10 cm **B)** 12 cm **C)** 15 cm **D)** 20 cm **E)** 24 cm

J8. Keturiuose iš pateiktų reiškinių skaičių 8 pakeitus bet kokiu kitu teigiamu skaičiumi (visur tuo pačiu), tų reiškinių reikšmės nekinta. Kuris iš pateiktų reiškinių nepasižymi šia savybe?

A) $(8+8-8):8$ **B)** $8+(8:8)-8$ **C)** $8:(8+8+8)$ **D)** $8-(8:8)+8$ **E)** $8\cdot(8:8):8$

J9. Dvi keturkampio kraštinės lygios 1 ir 4, o viena keturkampio įstrižainė lygi 2 ir dalija keturkampį į du lygiašonius trikampius. Kam lygus keturkampio perimetras?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

J10. Skaičiai 144 ir 220 dalijasi iš natūraliojo skaičiaus n su liekana 11. Kam lygus skaičius n?

A) 7 **B)** 11 **C)** 15 **D)** 19 **E)** 38

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

J11. Kai Vytukas užlipo ant stalo, jis tapo 80 cm aukštesnis už ant grindų stovintį Miką. Kai Mikas pats užlipo ant stalo ir nustūmė besipuikuojantį Vytuką ant grindų, tai jis tapo net metru aukštesnis už Vytuką. Koks yra stalo aukštis?

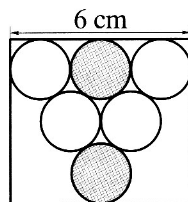
A) 20 cm **B)** 80 cm **C)** 90 cm **D)** 100 cm **E)** 120 cm

J12. Aistis ir Austėja mėto monetą. Atvirtus skaičiui, Aistis turi duoti Austėjai du saldainius, o atvirtus herbui — Austėja turi duoti Aisčiui tris saldainius. Po 30 metimų vaikai vėl turėjo po tiek saldainių, kaip ir pradžioje. Kiek kartų iškrito herbas?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

J13. „Lygiakraštis trikampis“, sudarytas iš besiliečiančių apskritimų, patalpintas į 6 cm ilgio stačiakampį (žr. pav.). Kam lygus trumpiausias atstumas tarp pilkų skritulių?

A) 1 cm **B)** $\sqrt{2}$ cm **C)** $(2\sqrt{3}-2)$ cm **D)** $\frac{\pi}{2}$ cm **E)** 2 cm

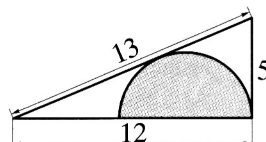


J14. Dėdės Balio namuose stovi keturi seni laikrodžiai, kurie visi rodo netikslų laiką. Tikrindamas laiką pagal pirmą laikrodį dėdė apsirinka 2 minutėmis, pagal antrą — 3 minutėmis, pagal trečią — 4 minutėmis, o pagal ketvirtą — 5 minutėmis. Kai vieną kartą dėdė Balys patikrino visus keturis laikrodžius, jie atitinkamai rodė be 6 minučių tris, be 3 minučių tris, 2 minutes po trijų ir 3 minutes po trijų. Kiek laiko buvo tuo metu iš tikrųjų?

A) 3:00 **B)** 2:57 **C)** 2:58 **D)** 2:59 **E)** 3:01

J15. Brėžinyje pavaizduotas statusis trikampis su kraštinėmis 5, 12 ir 13. Kam lygus įbrėžtojo pusapskritimio spindulys?

A) $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** $\frac{12}{3}$ **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$



J16. Kiek yra keturženklių natūraliųjų skaičių, kurių šimtų skaitmuo yra 3, o kitų bet kurių trijų skaitmenų suma taip pat lygi 3?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

J17. Į lentelės 3×4 langelius reikia įrašyti po skaitmenį nuo 1 iki 9 taip, kad visų eilučių skaičių sumos būtų tarpusavyje lygios ir visų stulpelių skaičių sumos būtų tarpusavyje lygios. Kengūra jau įrašė kelis skaičius. Koks skaičius turi būti įrašytas į nudažytą langelį?

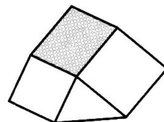
2	4		2
	3	3	
6		1	

A) 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

J18. Trys bėgikai Kenzius, Gūzius ir Razius dalyvavo maratone „Ken-Gū-Ra“. Prieš varžybas žiūrovai aptarė jų būsimą pasirodymą.
Pirmasis pasakė: „Laimės Kenzius arba Gūzius“.
Antrasis pasakė: „Jei Gūzius atbėgs antras, tai Razius laimės“.
Trečiasis pasakė: „Jei Gūzius bus trečias, tai Kenzius nelaimės“.
Ketvirtasis pasakė: „Antras atbėgs Gūzius arba Razius“.
Netrukus paaiškėjo, kad visi keturi žiūrovai buvo teisūs. Kenzius, Gūzius ir Razius užėmė prizines vietas. Kuria tvarka (pradedant greičiausiuoju) jie pasiekė finišą?

A) Kenzius, Gūzius, Razius **B**) Kenzius, Razius, Gūzius **C**) Razius, Gūzius, Kenzius
D) Gūzius, Razius, Kenzius **E**) Gūzius, Kenzius, Razius

J19. Pavaizduota figūra sudaryta iš dviejų kvadratų, kurių kraštinių ilgiai yra 4 ir 5, trikampio, kurio plotas lygus 8, ir nudažyto lygiagretainio. Koks yra lygiagretainio plotas?



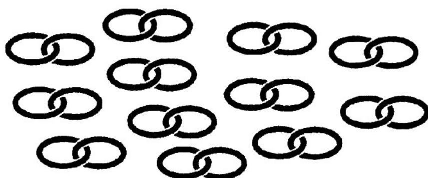
A) 15 **B**) 16 **C**) 18 **D**) 20 **E**) 21

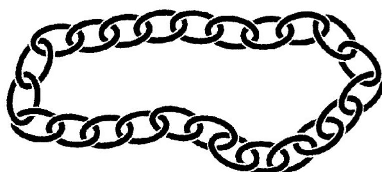
J20. Onutė užrašė teisingą lygybę $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$, čia m ir k — tam tikri natūralieji skaičiai. Kam lygi skaičiaus k reikšmė?

A) 2 **B**) 3 **C**) 4 **D**) 9 **E**) 11

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

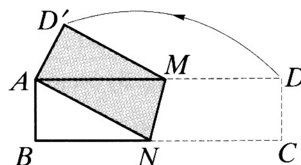
J21. Juvelyras iš 12 dvigrandžių grandinės dalių nori padaryti vieną uždarą grandinę (žr. pav.). Tam jis turės praverti (ir vėl užverti) kelias grandis. Kiek mažiausiai grandžių teks praverti juvelyrui?





A) 8 **B**) 9 **C**) 10 **D**) 11 **E**) 12

J22. Stačiakampis 16×4 matmenų popieriaus lapelis $ABCD$ taip sulenktas išilgai linijos MN, kad viršūnė C sutaptų su viršūne A (žr. pav.). Kam lygus penkiakampio $ABNMD'$ plotas?



A) 17 **B**) 27 **C**) 37 **D**) 47 **E**) 57

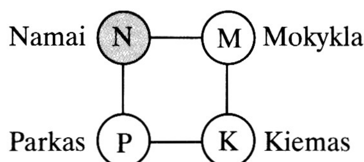
J23. Traukinys G pravažiavo pro pakelės stulpą per 8 sekundes ir iš karto ėmė važiuoti pro priešingon pusėn riedantį traukinį H. Traukiniai G ir H prasilenkė per 9 sekundes. Vos atsidūręs už traukinio G, traukinys H pradėjo važiuoti pro tą patį pakelės stulpą ir pro jį pravažiavo per 12 sekundžių. Abu traukiniai važiavo pastoviais greičiais. Koks yra traukinių G ir H ilgių santykis?

A) 2 **B**) 1 **C**) $\frac{2}{3}$ **D**) $\frac{1}{2}$ **E**) $\frac{3}{2}$

J24. Koks yra paskutinis nenulinis skaičiaus $K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ skaitmuo?

A) 1 **B**) 2 **C**) 4 **D**) 6 **E**) 9

J25. Mažoji Laimutė žaidžia stalo žaidimą „Lėlytės diena“. Paveikslėlyje pavaizduota žaidimo lenta. Lėlytė pradžioje pastatoma į laukelį M. Vienu ėjimu lėlytė gali pereiti iš savo laukelio į vieną iš dviejų gretimų. Keliais būdais lėlytė gali grįžti iš mokyklos į namus lygiai per 13 ėjimų?



A) 12 **B**) 32 **C**) 64 **D**) 144 **E**) 1024

J26. Dėdės Balio kambaryje stovi penkios lempos, kurių kiekviena gali būti dviejų būsenų: uždegta arba išjungta. Spustelėjus bet kurios lempos jungiklį, jos būsena pakinta. Deja, tokiu atveju visada pakinta ir dar vienos lempos būsena (o su kuria lempa taip nutinka, yra visiško atsitiktinumo dalykas). Pradžioje visos lempos buvo išjungtos. Dėdė Balys spaudė lempų jungiklius iš viso 10 kartų. Kuris iš šių teiginių yra teisingas?

A) Visos lempos negalėjo likti išjungtos **B**) Neišvengiamai užsidegė visos lempos
C) Lempos negalėjo užsidegti visos **D**) Neišvengiamai visos lempos liko išjungtos
E) Visi keturi teiginiai **A**—**D** yra klaidingi

J27. Duoti šeši skirtingi natūralieji skaičiai, iš kurių didžiausias yra n. Tarp šių skaičių egzistuoja lygiai viena tokia skaičių pora, kurioje didesnysis skaičius nesidalija iš mažesniojo. Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?

A) 18 **B**) 20 **C**) 24 **D**) 36 **E**) 45

J28. Arnas apskaičiavo kiekvieno triženklio skaičiaus skaitmenų sandaugą ir visas gautąsias sandaugas sudėjo. Kokį skaičių turėjo gauti Arnas?

A) 45 **B**) 45^2 **C**) 45^3 **D**) 2^{45} **E**) 3^{45}

J29. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki 120 surašyti į 15 eilučių lentelę, kaip parodyta paveikslėlyje. Kurio stulpelio (skaičiuojant iš kairės) skaičių suma yra didžiausia?

1							···	
2	3						···	
4	5	6					···	
7	8	9	10				···	
11	12	13	14	15			···	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
106	107	108	109	110	111	112	···	120

A) 1-ojo **B**) 5-ojo **C**) 7-ojo **D**) 10-ojo **E**) 13-ojo

J30. Duotas iškilasis aštuonkampis $ABCDEFGH$. Laura pasirinko vieną iš šešių viršūnių C, D, E, F, G, H ir sujungė ją su viršūne A. Tada Violeta pasirinko vieną iš tų pačių šešių viršūnių ir sujungė ją su viršūne B. Taip aštuonkampis buvo padalytas į lygiai tris daugiakampius. Kiek tokių skirtingų padalijimų galima gauti nurodytu būdu?

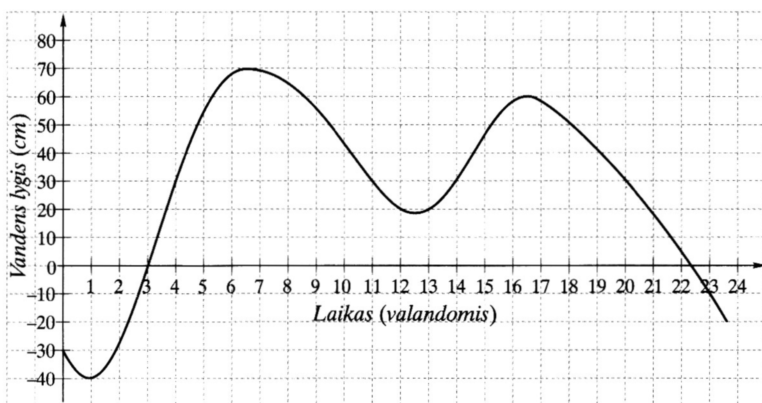
A) 6 **B**) 9 **C**) 10 **D**) 12 **E**) 16

SENJORAS (XI ir XII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

S1. Paveikslėlyje parodyta, kaip uoste per parą kilo ir slūgo vanduo. Kelias valandas per šią parą vanduo buvo pakilęs virš jūros lygio daugiau nei 30 cm?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 13

S2. Kam lygus skaičius $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$? **A)** 1 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt[6]{4}$ **D)** $\sqrt[3]{4}$ **E)** 2

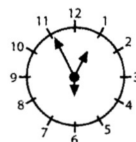
S3. Iš penkių į langelius surašytų skaičių

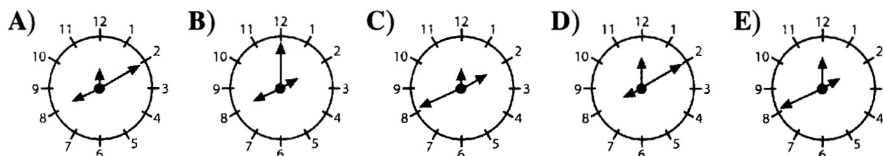
2				12

matomi pirmas skaičius 2 ir paskutinis skaičius 12. Pirmų trijų skaičių sandauga lygi 30, vidurinių trijų skaičių sandauga lygi 90, o paskutinių trijų — net 360. Kam lygus vidurinis skaičius?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

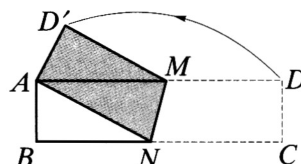
S4. Teisingą laiką rodantis laikrodis turi skirtingo ilgio valandinę, minutinę ir sekundinę rodykles, tik nežinoma, kuri rodyklė yra kuri. Paveikslėlyje šis laikrodis rodo laiką 12:55:30. Kaip atrodys laikrodis, kai jis rodys laiką 8:10:00?





S5. Stačiakampis 16 cm × 4 cm matmenų popieriaus lapelis $ABCD$ taip sulenktas išilgai linijos MN, kad viršūnė C sutaptų su viršūne A (žr. pav.). Kam lygus keturkampio $ANMD'$ plotas?

A) 28 cm^2 **B)** 30 cm^2 **C)** 32 cm^2 **D)** 48 cm^2 **E)** 56 cm^2



S6. Devynių skaitmenų suma lygi 8. Kam lygi šių skaitmenų sandauga?

A) 0 **B**) 1 **C**) 8 **D**) 9 **E**) 9!

S7. Su kokia didžiausia natūraliąja skaičiaus n reikšme galioja nelygybė $n^{200} < 5^{300}$?

A) 5 **B**) 6 **C**) 8 **D**) 11 **E**) 12

S8. Kuri iš duotųjų funkcijų (savo apibrėžimo srityje) tenkina lygtį $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

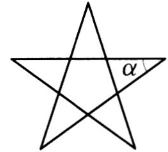
A) $f(x) = \frac{2}{x}$ **B**) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **C**) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ **D**) $f(x) = \frac{1}{x}$ **E**) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

S9. Realusis skaičius x tenkina nelygybes $x^3 < 64 < x^2$. Kuri nelygybė yra teisinga bet kuriam tokiam skaičiui x?

A) $0 < x < 64$ **B**) $-8 < x < 4$ **C**) $x > 8$ **D**) $-4 < x < 8$ **E**) $x < -8$

S10. Kam lygus taisyklingosios penkiakampės žvaigždės kampas α?

A) 24° **B**) 30° **C**) 36° **D**) 45° **E**) 72°



KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Jono amžius yra dviženklis skaičiaus 5 laipsnis, o jo pusbrolio Petro — dviženklis skaičiaus 2 laipsnis. Abiejų skaičių visų skaitmenų suma yra nelyginė. Kam lygi tų skaitmenų sandauga?

A) 240 **B**) 2010 **C**) 60 **D**) 50 **E**) 300

S12. Turistų grupei, atvykusiai į Siciliją, buvo surengtos keturios ekskursijos. Kiekvienoje ekskursijoje dalyvavo 80 % turistų. Kiek mažiausiai procentų turistų galėjo dalyvauti visose keturiose ekskursijose?

A) 80 % **B**) 60 % **C**) 40 % **D**) 20 % **E**) 16 %

S13. Kokia yra nelygybės $|x| + |x - 3| > 3$ sprendinių aibė?

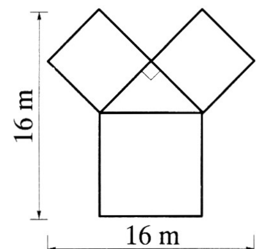
A) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ **B**) $(-3; 3)$ **C**) $(-\infty; -3)$ **D**) $(-3; +\infty)$ **E**) $(-\infty; +\infty)$

S14. Vienoje Slovakijos mokykloje ketvirtokų klasė parašė kontrolinį darbą. Kiekvienas mokinys buvo įvertintas pažymiu 1, 2, 3, 4 arba 5. Klasės pažymių vidurkis buvo 4. Berniukų pažymių vidurkis buvo 3,6, o mergaičių — 4,2. Kuris teiginys apie kontrolinį darbą rašiusius mokinius yra teisingas?

A) Berniukų buvo dvigubai daugiau nei mergaičių
B) Berniukų buvo 4 kartus daugiau nei mergaičių
C) Mergaičių buvo dvigubai daugiau nei berniukų
D) Mergaičių buvo 4 kartus daugiau nei berniukų
E) Berniukų ir mergaičių buvo po lygiai

S15. Paveikslėlyje pavaizduotas rožyno planas. Dviejuose lygiuose kvadratuose auga baltos rožės, didesniame kvadrate — raudonos, o stačiajame trikampyje — geltonos. Rožyno ilgis ir plotis lygūs 16 m. Kam lygus rožyno plotas?

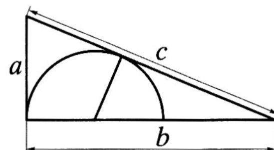
A) 114 m² **B**) 130 m² **C**) 144 m² **D**) 160 m² **E**) 186 m²



S16. Kino teatre vietos kiekvienoje eilėje sunumeruotos įprasta tvarka pradedant nuo 1. Vienam kino seansui visos vietos pirmoje eilėje buvo parduotos. Be to, per klaidą į vieną iš tų vietų buvo parduoti du bilietai. Visų pirmos eilės vietų numerių, užrašytų ant parduotų bilietų, suma lygi 857. Koks buvo dusyk parduotos vietos numeris?

A) 4 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 37 **E)** 42

S17. Paveikslėlyje pavaizduotas statusis trikampis su kraštinėmis a, b ir c. Kam lygus įbrėžto pusapskritimio spindulys r?

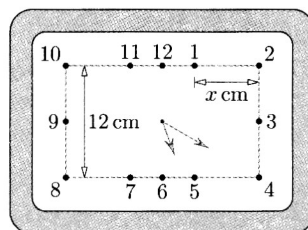


A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ **B)** $\frac{ab}{a+b+c}$ **C)** $\frac{ab}{b+c}$ **D)** $\frac{2ab}{a+b+c}$ **E)** $\frac{ab}{a+c}$

S18. Kvadrato $ABCD$ kraštinių $AB = AD = 2$ vidurio taškai yra atitinkamai E ir F, o atkarpos CF taškas G tenkina lygybę $3CG = 2GF$. Kam lygus trikampio BEG plotas?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{6}{5}$

S19. Pavaizduoto laikrodžio ciferblatas yra stačiakampis, laikrodžio rodyklės juda pastoviais greičiais ir jis rodo teisingą laiką. Atstumas tarp padalų 8 ir 10 lygus 12 cm, o atstumas tarp padalų 1 ir 2 lygus x cm. Kam lygi x reikšmė?



A) $3\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $4\sqrt{3}$ **D)** $2+\sqrt{3}$
E) $12-3\sqrt{3}$

S20. Taisyklingojo lošimo kauliuko dviejose priešingose sienelėse esančių akučių skaičių suma lygi 7. Kengūra tokius kauliukus deda į eilę, glausdama po lygiai akučių turinčias sieneles. Ji nori, kad išorinėse (t.y. nesuglaustose) sienelėse iš viso būtų 2012 akučių. Kiek lošimo kauliukų prireiks Kengūrai?

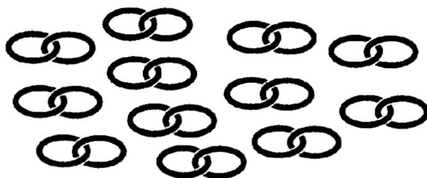
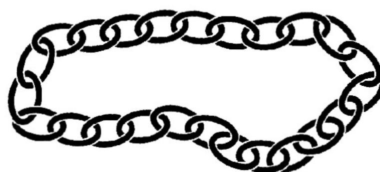
A) 70 **B)** 71 **C)** 142 **D)** 143 **E)** 2012 akučių gauti neįmanoma

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Lygiašonio trikampio ABC pusiaukraštinė dalija jį į du lygiašonius trikampius. Kokį patį mažiausią kampą gali turėti trikampis ABC?

A) 15° **B)** 22,5° **C)** 30° **D)** 36° **E)** 45°

S22. Juvelyras iš 12 dvigrandžių grandinės dalių nori padaryti vieną uždarą grandinę (žr. pav.). Tam jis turės praverti (ir vėl užverti) kelias grandis. Kiek mažiausiai grandžių teks praverti juvelyrui?

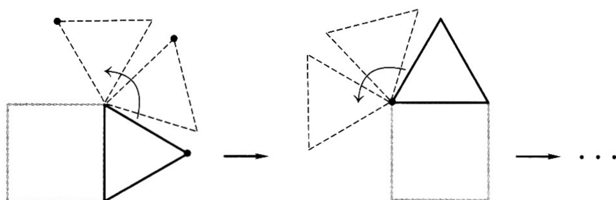



A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

S23. Su trupmena galima atlikti dvi operacijas: 1) pridėti prie skaitiklio skaičių 8; 2) pridėti prie vardiklio skaičių 7. (Trupmenos prastinti negalima.) Pradedant trupmena $\frac{7}{8}$, buvo atlikta n operacijų ir gauta trupmena, lygi pradinei. Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?

A) 56 **B)** 81 **C)** 109 **D)** 113 **E)** Tokia situacija negalima

S24. Lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi 1, iš kairiajame paveikslėlyje pavaizduotos pradinės padėties sukamas aplink kvadratą, kurio kraštinė lygi 1.



Kokio ilgio kelią nueina tašku pažymėta trikampio viršūnė, kol ir trikampis, ir viršūnė atsiduria jų pradinėje padėtyje?

A) 4π **B)** $\frac{28}{3}\pi$ **C)** 8π **D)** $\frac{14}{3}\pi$ **E)** $\frac{21}{2}\pi$

S25. Skaičiai 1, 2, 3 ir 4 surašyti tam tikra tvarka x_1, x_2, x_3, x_4. Kiek yra tokių tvarkų, kad suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ dalijasi iš 3?

A) 8 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 24

S26. Po algebros pamokos išdykę vaikai ant lentos nubraižė funkcijos $y = x^2$ grafiką ir 2012 tiesių, kurių kiekviena buvo lygiagreti su tiese $y = x$ ir kirto parabolę dviejuose taškuose. Kam lygi visų sankirtos taškų abscisių (x koordinačių) suma?

A) 0 **B)** 1 **C)** 1006 **D)** 2012 **E)** To neįmanoma nustatyti

S27. Duotos trijų kubo viršūnių koordinatės $P(3; 4; 1)$, $Q(5; 2; 9)$ ir $R(1; 6; 5)$. Kokiame taške yra kubo centras?

A) $A(4; 3; 5)$ **B)** $B(2; 5; 3)$ **C)** $C(3; 4; 7)$ **D)** $D(3; 4; 5)$ **E)** $E(2; 3; 5)$

S28. Duota seka $1, 1, 0, 1, -1, \ldots$. Jos pirmieji du nariai a_1 ir a_2 lygūs 1. Sekos narys, einantis iš karto po jų, lygus jų skirtumui, t. y. $a_3 = a_1 - a_2$. Kitas narys, einantis po antrojo ir trečiojo narių, lygus jų sumai, t.y. $a_4 = a_2 + a_3$. Tada $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, ir t.t. Kam lygi pirmųjų 100 sekos narių suma?

A) 0 **B)** 3 **C)** -21 **D)** 100 **E)** -1

S29. Joana iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ parinko du skirtingus skaičius a ir b. Jų sandauga ab lygi likusių 24 aibės skaičių sumai. Kam lygus skirtumo modulis $|a - b|$?

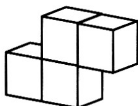
A) 10 **B)** 9 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 6

S30. Murklijoje kiekviena katė yra arba gudri, arba kvaila. Gudri katė, atsidūrusi viename kambaryje su 3 kvailomis, pati tampa kvaila. Kvaila katė, atsidūrusi viename kambaryje su 3 gudriomis, yra tuoj pat jų demaskuojama. Iš pradžių į kambarį viena po kitos įėjo keturios katės. Tada pirmoji katė išėjo, vėliau įėjo penktoji, išėjo antroji, įėjo šeštoji, išėjo trečioji ir t. t. Po to, kai įėjo 2012-oji katė, pirmą kartą nutiko taip, kad viena iš kambaryje atsidūrusių kačių buvo demaskuota. Kurios dvi katės galiausiai liko kvailos?

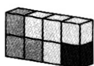
A) 1-oji ir 2011-oji **B)** 2-oji ir 2010-oji **C)** 3-ioji ir 2009-oji
D) 4-oji ir 2012-oji **E)** 2-oji ir 2011-oji

SPRENDIMAI

JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. Ⓓ 

! Gretasienis sudarytas iš tokių dviejų dalių:

Kubelių X, Y, Z spalvos nematomos. Vienas iš jų turėtų būti juodas, o kiti du balti. Juodajai detalei tegali priklausyti kubelis Z — tik jis suglaustas su kitu juodu kubeliu, todėl kubeliai X ir Y balti. Baltoji detalė pavaizduota atsakyme **D**.
Teisingas atsakymas **D**.

J2. Ⓓ 9,999

! Kad greičiausiai atliktume aritmetinį veiksmą, pirmiausia suprastinkime „bendrą“ dviejų skaičių dalį:

$$11{,}11 - 1{,}111 = 10 + 1{,}11 - 1{,}11 - 0{,}001 = 10 - 0{,}001 = 9{,}999.$$

Teisingas atsakymas **D**.

J3. Ⓓ 6

! Pusiaukraštinė trikampį dalija į du trikampius su bendra aukštine ir lygiomis kraštinėmis, į kurias ta aukštinė išvesta, t. y. į du lygiapločius trikampius (prisiminkite formulę $S = \frac{1}{2}ah$). Vadinasi, $6 + 3 = 3 + ?$ ir $? = 6$.
Teisingas atsakymas **D**.

J4. Ⓔ Alytė suklydo

! Skaičiai 57, 63, 51 žymi raides S, U, O, bet lygties $2n + 9 = 42$ sprendinys nėra sveikasis skaičius, todėl (kaip ir bet koks lyginis skaičius) nežymi jokios raidės. Vadinasi, Alytė suklydo.
Teisingas atsakymas **E**.

J5. Ⓒ 12 cm

! Ieškomas atstumas lygus atstumo nuo taško E iki tiesės CD ir atstumo tarp tiesių CD ir AB sumai. Pirmasis atstumas lygus trikampio ECD aukštinei, išvestai iš viršūnės E (ją pažymėkime h). Antrasis — kvadrato kraštinei, t. y. 4 cm. Sulyginkime trikampio ir kvadrato plotus: $\frac{1}{2}h \cdot CD = 4 \cdot 4\,(\mathrm{cm}^2)$, $\frac{1}{2}h \cdot 4 = 16$, $h = 8$. Taigi ieškomas atstumas lygus $8 + 4 = 12\,(\mathrm{cm})$.
Teisingas atsakymas **C**.

J6. Ⓐ 0

? Nagrinėjamieji skaitmenys gali būti tokie: 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0. Jų sandauga lygi 0.
Renkamės atsakymą **A**.

! Ar sandauga lygi 0 visada? Taip, nes vienas iš skaitmenų turi būti 0 — juk jei 7 žmonės sudėjo į pintinę 6 obuolius, tai bent vienas nieko į ją neįdėjo.
Teisingas atsakymas **A**.

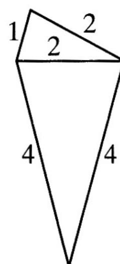
J7. Ⓑ 12 cm

! Trikampio ABC įžambinė lygi $\sqrt{6^2+8^2} = 10\,(\text{cm})$. Kadangi K, L, M yra trikampio kraštinių vidurio taškai, tai atkarpos KL, LM, MK yra jo vidurio linijos, ir kiekvienos iš jų ilgis lygus pusei vienos iš trikampio ABC kraštinių ilgio. Taigi trikampio KLM perimetras lygus $KL+LM+MK = \frac{6}{2}+\frac{8}{2}+\frac{10}{2} = 12\,(\text{cm})$.
Teisingas atsakymas **B**.

J8. Ⓓ $8-(8:8)+8$

! Statykime į reiškinius vietoj 8 raidę a.
$(a+a-a):a = a:a = 1$, $a+(a:a)-a = a+1-a = 1$, $a:(a+a+a) = a:(3a) = \frac{1}{3}$, $a\cdot(a:a):a = a\cdot 1:a = a:a = 1$ bet kokiam $a \neq 0$, bet $a-(a:a)+a = a-1+a = 2a-1$ įgyja skirtingas reikšmes skirtingiems a, todėl teisingas atsakymas yra **D**.
Teisingas atsakymas **D**.

J9. Ⓓ 11



! Įstrižainė dalija keturkampį į du trikampius. Nagrinėkime tą iš jų, kurio viena kraštinė (sutampanti su keturkampio kraštine) lygi 1. Kadangi trikampis lygiašonis, o dviejų jo kraštinių ilgiai yra 1 ir 2, tai trečios kraštinės ilgis turi būti 1 arba 2. Jis negali būti 1, nes $1+1 \leqslant 2$, o trikampio dviejų kraštinių ilgių suma visada viršija trečiosios kraštinės ilgį. Vadinasi, trečioji kraštinė lygi 2.
Panašiai išnagrinėkime kitą trikampį. Jis neišvengiamai turės kraštinę, lygią 4. Likusi šio trikampio kraštinė turi būti lygi 2 arba 4. Ji negali būti lygi 2, nes $2+2 \leqslant 4$. Taigi keturkampio kraštinės yra lygios 1, 2, 4, 4 (žr. pav.), o perimetras lygus $1+2+4+4 = 11$.
Teisingas atsakymas **D**.

J10. Ⓓ 19

! Uždavinio sąlyga reiškia, kad egzistuoja natūralieji skaičiai k_1 ir k_2, tenkinantys lygybes

$$144 = nk_1 + 11 \quad \text{ir} \quad 220 = nk_2 + 11.$$

Vadinasi, n yra bendras skaičių

$$144 - 11 = 133 = 7\cdot 19 \quad \text{ir} \quad 220 - 11 = 209 = 11\cdot 19$$

daliklis. $n = 1$ netinka, nes iš jo duoti skaičiai dalijasi be liekanos. Taigi $n = 19$.
Teisingas atsakymas **D**.

J11. Ⓒ 90 cm

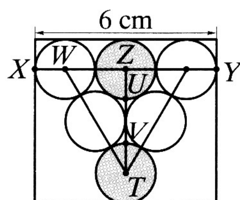
! Kad būtų lengviau mąstyti, visus nežinomus dydžius — Vytuko, Miko ir stalo aukščius — pažymėkime atitinkamai raidėmis v, m ir s (cm). Vytuko ir stalo aukščiai kartu sudėjus 80 cm viršija Miko aukštį: $v+s = m+80$. Analogiškai gauname, kad $m+s = v+100$. Sudėję abi lygtis randame s: $v+s+m+s = m+v+180$ ir $2s = 180$. Taigi $s = 90\,(\text{cm})$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Pastebėkime, kad Vytuko ir Miko aukščių iš uždavinio sąlygos rasti neįmanoma (berniukams ūgtelėjus po tiek pat centimetrų, sąlyga nepasikeistų). Tačiau vaikų aukščių skirtumas yra svarbus. Būdinga klaida būtų spėti, kad $1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$ ir 80 cm skirtumas (20 cm) ir yra vaikų aukščių skirtumas $m - v$ (cm). Juk tas vaikų aukščių skirtumas paveikia abu duotus skaičius: ant stalo užlipus aukštesniam berniukui, vieną iš jų didina, o užlipus mažesniam — kitą tiek pat mažina. Todėl 20 cm yra dvigubas vaikų aukščių skirtumas (algebriškai tai būtų galima užrašyti $20 = (s+(m-v)) - (s-(m-v)) = 2(m-v)$). Taigi Mikas yra 10 cm aukštesnis už Vytuką. Dabar bet kuri iš lygybių $s-10 = 80$ ir $s+10 = 100$ duoda mums atsakymą 90 cm.

J12. Ⓑ 12

! Spręsti paprasčiausia sudarant lygtį. Jei herbas iškrito x kartų, tai lygiai tiek kartų Austėja atidavė saldainių Aisčiui, o tada Aistis Austėjai davė saldainius $30 - x$ kartų. Iš sąlygos aišku, kad vaikai vienas kitam davė po lygiai saldainių: $3x = 2(30 - x)$. Iš karto gauname atsakymą: $5x = 60$ ir $x = 12$.
Teisingas atsakymas **B**.

J13. Ⓒ $(2\sqrt{3} - 2)$ cm



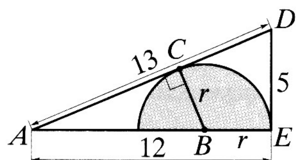
! Apskritimų centrus bei lietimosi taškus pažymėkime ir sujunkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Atkarpos XY ilgis yra 6 cm, ją sudaro trijų lygių apskritimų spinduliai. Todėl kiekvieno iš pavaizduotų šešių lygių apskritimų spindulys yra 1 cm.
Mums reikia rasti atkarpos UV ilgį. Ji yra atkarpos ZT dalis, o atkarpa ZT savo ruožtu yra lygiakraščio trikampio su kraštine 4 cm aukštinė. Jos ilgį galima rasti pritaikius Pitagoro teoremą trikampiui ZTW: $ZT^2 = TW^2 - WZ^2 = 4^2 - 2^2 = 12\,(\text{cm}^2)$ ir $ZT = 2\sqrt{3}$ cm. Pagaliau, $UV = ZT - ZU - VT = 2\sqrt{3} - 1 - 1 = 2\sqrt{3} - 2$ (cm).
Teisingas atsakymas **C**.

J14. Ⓓ 2:59

? Nesunku tiesiog tikrinti atsakymus iš eilės. Tarkime, atsakymas **A** netinka, nes tada vienas laikrodis vėluotų 6 minutėmis ir net du apsiriktų 3 minutėmis. O atsakymas **D** tinka, nes tada du laikrodžiai vėluotų atitinkamai 5 ir 2 minutėmis, o kiti du skubėtų atitinkamai 3 ir 4 minutėmis.
Renkamės atsakymą **D**.

! Norint įsitikinti, kad joks kitas atsakymas negalimas, tereikia pastebėti štai ką: visi laikrodžiai klysta daugiausiai 5 minutėmis, todėl tikrasis laikas daugiausiai 5 minutėmis skiriasi nuo laiko 2:54, t. y. neviršija 2:59. Iš kitos pusės, 5 minutes atėmę iš 3:03, apribosime tikrąjį laiką iš apačios (laiko yra mažiausiai 2:58). Kadangi visų laikrodžių paklaidos duotos sveikuoju minučių skaičiumi, belieka dvi galimybės 2:58 ir 2:59. Jau žinome, kad 2:59 tinka. Laikas 2:58 netinka, nes tada paklaidos būtų 1, 4, 4 ir 5 minučių.
Teisingas atsakymas **D**.

J15. Ⓑ $\frac{10}{3}$



! Sprendžiant uždavinius apie apskritimus, liečiančius atkarpas, dažnai pravartu išvesti spindulį iš apskritimo centro į lietimosi tašką bei pasinaudoti jo statmenumu liestinei (žr. pav., čia apskritimo spindulys pažymėtas r). Dabar belieka pritaikyti Pitagoro teoremą trikampio ABC kraštinėms $BC = r$, $AB = 12 - r$ ir $AC = AD - CD = 13 - DE = 13 - 5 = 8$ (čia pasinaudojome tuo, kad $CD = DE$ kaip liestinių, išvestų iš taško D to paties apskritimo atžvilgiu, atkarpos). Gauname lygtį su vienu nežinomuoju $(12 - r)^2 = r^2 + 8^2$. Suprastinkime ją: $24r = 144 - 64 = 80$. Gauname $r = \frac{10}{3}$.
Teisingas atsakymas **B**.

J16. Ⓔ 6

! Išvardykime visus ieškomus skaičius. Jei trijų skaitmenų suma lygi 3, tai pakanka nagrinėti skaitmenis 0, 1, 2, 3.
1) Kai didžiausias iš tų skaitmenų yra 3, tai kiti du yra lygūs 0: $3 + 0 + 0 = 3$. Gauname vienintelį skaičių 3300.
2) Kai didžiausias iš trijų skaitmenų yra 2, kitų dviejų suma yra $1 = 1 + 0$. Dabar turime skaitmenis 2, 1, 0, o 0 negali būti pirmas iš jų. Taip gauname dar keturis skaičius: 2310, 2301, 1320, 1302.
3) Jei visi trys skaitmenys ne didesni už 1, tai turime vienintelę galimybę: $3 = 1 + 1 + 1$ ir vienintelį

skaičių 1311. Iš viso gavome $1+4+1=6$ skaičius.
Teisingas atsakymas **E**.

J17. Ⓑ 4

? Užuot aklai spėlioję nesurašytus skaičius, bandykime juos pasižymėti ir nustatyti sąryšius tarp jų. Pagal stulpelius gauname $2+x+6=4+3+y=z+3+1$, todėl $y=8+x-7=x+1$, $z=x+4$. Pagal pirmąją ir trečiąją eilutes gauname lygybes $8+z=7+y+u$. Vadinasi, $8+(x+4)=7+(x+1)+u$ ir $u=12+x-8-x=4$.
Renkamės atsakymą **B**.

2	4	z	2
x	3	3	t
6	y	1	u

! Dar patikriname, ar lentelę tikrai įmanoma užpildyti. Dvi viršutinės eilutės duoda lygybę $8+z=6+x+t$, iš kurios randame t: $t=2+z-x=2+(x+4)-x=6$. Dabar dešiniojo stulpelio skaičių suma lygi $2+6+4=12$. Pagal stulpelius tuojau randame $x=4$, $y=5$, $z=8$. Eilučių sumos tokiems skaičiams yra lygios 16, o stulpelių — lygios 12.
Teisingas atsakymas **B**.

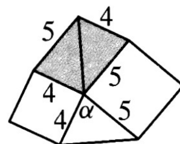
J18. Ⓓ Gūzius, Razius, Kenzius

? Pakanka patikrinti atsakymus. Pirmojo teiginio netenkina atsakymas **C** (Razius negali laimėti). Antrojo — atsakymas **A** (Gūzius antras, bet Razius nelaimėjo). Trečiojo — atsakymas **B** (Gūzius trečias, bet Kenzius laimėjo). Ketvirtojo — atsakymas **E** (Kenzius negali būti antras). Lieka atsakymas **D**, kuris tenkina visus teiginius.
Renkamės atsakymą **D**.

! Nepatikrinome dar vienos bėgikų tvarkos, kurios nėra atsakymuose: Razius, Kenzius, Gūzius. Ji netenkina net dviejų teiginių — pirmo ir ketvirto.
Teisingas atsakymas **D**.

J19. Ⓑ 16

! Dvi duotojo trikampio kraštinės bei lygiagretainio kraštinės lygios 4 ir 5. Įstrižaine padalykime lygiagretainį į du lygius trikampius (žr. pav.). Duotojo trikampio kampą su viršūne pavaizduotos figūros viduje pažymėkime α. Tada lygiagretainio kampas su viršūne figūros viduje lygus (pagal pilnąjį kampą) $360^\circ-\alpha-90^\circ-90^\circ=180^\circ-\alpha$, o kitas (gretimas) lygiagretainio kampas lygus $180^\circ-(180^\circ-\alpha)=\alpha$. Todėl lygiagretainis sudarytas iš dviejų trikampių, lygių duotajam (pagal dvi kraštines 4 ir 5 bei kampų tarp jų α). Lygiagretainio plotas lygus dvigubam trikampio plotui $8\cdot 2=16$.
Teisingas atsakymas **B**.



J20. Ⓓ 9

? Pastebėjus, kad $2012=2^2\cdot 503$, natūralu išbandyti reikšmę $m=2$ ir spręsti lygtį $503=2^k-k$. Jei $k\leqslant 8$, tai $2^k-k<2^k\leqslant 2^8=256<503$. Tikriname reikšmę $k=9$: $2^9-9=512-9=503$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Įrodysime, kad be rastojo sprendinio kitų nėra. Reikšmė $m=1$ netinka, nes tada $m^k-k\leqslant 0$. Jei $m\geqslant 5$, tai $m^m\geqslant 5^5=25\cdot 25\cdot 5\geqslant 25\cdot 20\cdot 5=25\cdot 100=2500>2012$. Na, o $m=3$ ir $m=4$ netinka, nes 2012 nei iš 3^3, nei iš 4^4 nesidalija. Taip grįžtame prie lygties $503=2^k-k$. Jau įsitikinome, kad $k\geqslant 9$. Žinome, kad $2^9-9=503$.
Kodėl k negali būti didesnis? Intuityviai aišku, kad seka $2^9-9, 2^{10}-10, 2^{11}-11, \ldots$ greitai didėja. Įsitikinkime tuo. Tegu $k\geqslant 9$. Palyginkime gretimus sekos narius 2^k-k ir $2^{k+1}-(k+1)$: $2^{k+1}-(k+1)=2^k+2^k-k-1=(2^k-k)+(2^k-1)>2^k-k$, nes $2^k-1>0$. Todėl $503=2^9-9<2^{10}-10<2^{11}-11<\cdots$ ir $k=9$ yra vienintelis sprendinys.
Teisingas atsakymas **D**.

J21. Ⓐ 8

? Nors dažnam gali kilti įspūdis, kad būtina praverti gana daug grandžių, teisingas yra mažiausias iš pateiktų atsakymų. Imkime keturias dvigrandes dalis ir praverkime visas 8 jų grandis, Tada likusias 8 dvigrandes dalis išrikiuokime ratu ir kiekvieną iš gretimų dalių porų sujunkime viena iš pravertų grandžių, ją užverdami. Taip ir gausime uždarą pilną grandinę.
Renkamės atsakymą **A**.

! Įrodykime, kad 7 ar mažiau pravertų grandžių neužtenka. Iš tiesų, pravėrus 7 ar mažiau grandžių, liks mažiausiai $2 \cdot 12 - 7 = 17$ nepravertų. Nepravertosios grandys sudarys dvigrandes ar viengrandes dalis, kurių bus daugiau nei 8, nes $8 \cdot 2 < 17$. Išrikiuokime tas grandis ratu pagal tai, kokia tvarka jos turėtų būti sujungtos. Tarp bet kurių dviejų dalių uždaroje grandinėje turėtų būti bent viena iš pravertųjų grandžių. Todėl pravertos tada turėtų būti bent 9 grandys, bet pravėrėme tik 7 — prieštara.
Teisingas atsakymas **A**.

J22. Ⓓ 47

! Pažymėkime $BN = x$. Tada $AN = CN = BC - BN = 16 - x$. Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiui ABN: $AB^2 + BN^2 = AN^2$ arba $4^2 + x^2 = (16 - x)^2$. Iš šios lygties galime rasti $x = \frac{15}{2}$ ir trikampio ABN plotą $\frac{1}{2}BA \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{15}{2} = 15$. Analogiškai randame ir $D'M = x = \frac{15}{2}$ bei $AM = 16 - x$. Trikampiai ABN ir $AD'M$ lygūs pagal tris lygias kraštines: $AB = AD'$, $BN = D'N$ ir $AN = AM$, todėl ir lygiapločiai. Vadinasi, lygiapločiai yra ir keturkampiai $ABNM$ ir $AD'MN$, sudaryti iš šių trikampių ir bendros trikampės dalies. Bet $AD'MN$ yra užlenktas keturkampis $CDMN$. Lygiapločiai keturkampiai $ABNM$ ir $CDMN$ sudaro stačiakampį $ABCD$, kurio plotas yra $16 \cdot 4 = 64$. Taigi $ABNM$, $CDMN$ (ir $ADMN$) plotai lygūs $64 : 2 = 32$. Gauname penkiakampio plotą $15 + 32 = 47$.
Teisingas atsakymas **D**.

J23. Ⓐ 2

! Važiuodamas pro stulpą traukinys nurieda atstumą, lygų jo ilgiui. Kai prasilenkia du traukiniai, jų priekiai, pradžioje esantys greta, tolsta vienas nuo kito bendru greičiu, lygiu traukinių greičių sumai, o atstumas tarp tų priekių galop tampa lygus traukinių ilgių sumai.
Traukinių ilgius (metrais) atitinkamai pažymėkime l_G ir l_H, o greičius (metrais per sekundę) — v_G ir v_H. Sudarykime tris sąryšius tarp kelio, laiko ir greičio

$$l_G = 8v_G, \quad l_H = 12v_H, \quad l_G + l_H = 9(v_G + v_H).$$

Mums reikia rasti sąryšį tarp l_G ir l_H, todėl eliminuokime v_G ir v_H:

$$v_G = \frac{l_G}{8}, \quad v_H = \frac{l_H}{12} \quad \text{ir} \quad l_G + l_H = 9\Big(\frac{l_G}{8} + \frac{l_H}{12}\Big).$$

Atskliauskime ir pertvarkykime gautąją lygtį: $\frac{l_G}{8} = \frac{l_H}{4}$ arba $l_G = 2l_H$.
Vadinasi, $l_G : l_H = 2$.
Teisingas atsakymas **A**.

J24. Ⓒ 4

! Iš užrašymo $K = 2^6 \cdot 3^4 \cdot (2^{53} \cdot 5^{53}) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 10^{53}$ matome, kad skaičius K baigiasi 53 nuliais, į kairę nuo kurių yra skaičius $2^6 \cdot 3^4 = 64 \cdot 81$. Skaičių stulpeliu dauginti nebūtina — paskutinis skaičiaus skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutinių skaitmenų 4 ir 1: jais besibaigiančius skaičius sudauginę visada gausime sandaugą, besibaigiančią tuo pačiu skaitmeniu $4 \cdot 1 = 4$. Tai ir yra ieškomas nenulinis skaitmuo.
Teisingas atsakymas **C**.

J25. © 64

! Pirmuoju ėjimu lėlytė dar negali grįžti į namus, todėl ji turi eiti į langelį „Kiemas“. Tada yra dvi antrojo ėjimo galimybės — parkas ir mokykla, iš kurių bet kurio lėlytė vėl grįš į kiemą trečiuoju ėjimu. Taip per du ėjimus lėlytė neišvengiamai grįžta į kiemą, ir tai galima padaryti dviem būdais. Kitais dviem ėjimais lėlytė turės padaryti tą patį, tada ir vėl tą patį, ir t. t., kol tryliktu ėjimu turės atsidurti namuose, o ne kieme.
Apibendriname: 1-ąjį ėjimą gali atlikti vienu būdu, 2-ąjį ir 3-ąjį — dviem, 4-ąjį ir 5-ąjį — dviem, ..., 12-ąjį ir 13-ąjį — dviem. Iš viso gauname $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^6$ (nuo 2 iki 13 yra $\frac{12}{2} = 6$ natūraliųjų skaičių poros), t. y. 64 grįžimo į namus būdus.
Teisingas atsakymas **C**.

J26. © Lempos negalėjo užsidegti visos

! Pirmuoju paspaudimu įsijungė dvi lempos. Kiek lempų galėjo degti po antrojo? Išjungus jau uždegtą lempą, galėjo užgesti ir kita arba užsidegti viena nauja — tada degtų 0 arba 2 lempos. Antruoju spustelėjimu įjungus išjungtą lempą, turėtume 2 arba 4 degančias lempas. Likusius 8 kartus dėdė Balys galėjo keisti vis tų pačių dviejų lempų būsenas ir tokiu būdu pabaigoje grįžti į po pirmųjų dviejų ėjimų susidariusią būseną. Taip sužinome, kad degti po 10 spustelėjimų galėjo 0, 2 arba 4 lempos. Todėl visos lempos galėjo likti išjungtos, kai kurios galėjo neužsidegti, kai kurios galėjo užsidegti. Vadinasi, atsakymai **A**, **B** ir **D** yra klaidingi.
Įrodysime, kad teiginys **C** yra teisingas. Pastebėkime, kad degančių lempų skaičius pradžioje buvo 0, tada 2, o tada 0, 2 arba 4. Jis visą laiką lyginis! Taip turėtų būti ir toliau: juk kai pakinta dviejų lempų būsenos, tai arba abi užsidega (degančių lempų skaičius padidėja 2), arba viena užsidega ir viena išsijungia (bendras degančių lempų skaičius nepakinta), arba abi išsijungia (tas skaičius sumažėja 2). Todėl degančių lempų lyginumas nekinta. Kalbant matematiškai, tas lyginumas yra invariantas lempų junginėjimo atžvilgiu. Būdamas lyginis, degančių lempų skaičius niekada nebus 5, t. y. visų lempų neuždegsi.
Teisingas atsakymas **C**.

J27. © 24

? Tegu išskirtinė skaičių pora yra (a, b), čia $a < b$ ir a nedalija b. Imkime 5 iš 6 duotų skaičių be skaičiaus a ir surašykime juos didėjimo tvarka: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Kadangi $a \neq n$, tai $x_5 = n$. Be to, $x_2 = d_1x_1$, $x_3 = d_2x_2$, $x_4 = d_3x_3$, $x_5 = d_4x_4$, čia d_1, d_2, d_3, d_4 yra natūralieji skaičiai, didesni už 1 (x_1 turi dalyti x_2 ir t. t.). Gauname, kad

$$n = x_5 = d_4x_4 = d_4d_3x_3 = d_4d_3d_2x_2 = d_4d_3d_2d_1x_1.$$

Jei $x_1 \geqslant 2$, tai $n \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Jei bent vienas iš skaičių d_1, d_2, d_3, d_4 didesnis už 2, tai $n \geqslant 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Todėl jei norime gauti n reikšmę, mažesnę už 24, turime imti $x_1 = 1$ ir $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 2$. Tada $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$. Tokio atsakymo tarp pateiktųjų nėra. Mažiausias galimas kandidatas dabar mums yra skaičius 24, kurį galime gauti, imdami skaičius $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 24$. Belieka rasti tinkamą a reikšmę. Tinka $a = 16$. Iš tiesų, skaičiai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ir skaičiai x_1, x_2, x_3, x_4, a dalija vienas kitą, o likusi pora $(a, x_5) = (16, 24)$ yra šiuo požiūriu išskirtinė. Taigi $n = 24$ yra mažiausia galima n reikšmė.
Renkamės atsakymą **C**.

! Jau įsitikinome, kad jei $n < 24$, tai $n = 16$. Įrodykime, kad $n = 16$ netinka. Kai $n = 16$, tai $x_1 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 2$ ir $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$. Kam tada lygus šeštasis skaičius a? Žinoma, $a < 16$ ir a nedalija 16, nes visi skaičiaus 16 dalikliai 1, 2, 4, 8 yra panaudoti. Vadinasi, $(a, 16)$ yra išskirtinė skaičių pora, bet tada $(a, 8)$ nėra, t. y. arba a dalija 8, arba 8 dalija a. Pirmuoju atveju a yra 1, 2, 4, o to negali būti. Antruoju atveju $a = 16$ arba $a \geqslant 24$ — vėlgi prieštara.
Teisingas atsakymas **C**.

J28. Ⓒ 45^3

! Sumuokime sandaugas iš eilės. Kelios pirmosios iš jų lygios 0, todėl pradėkime nuo mažiausių skaičių, kurių skaitmenų sandauga nenulinė: $111, 112, \ldots, 119$. Gauname sumą

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot 1 \cdot 9 = 1 \cdot 1 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 1 \cdot 1 \cdot 45.$$

Toliau pereikime prie skaičių $121, 122, \ldots 129$ (120 vėlgi galime praleisti). Panašiai gauname sumą $1 \cdot 2 \cdot 45$. Tolimesnė suma bus $1 \cdot 3 \cdot 45$, toliau eina $1 \cdot 4 \cdot 45$, $1 \cdot 5 \cdot 45$, ..., $1 \cdot 9 \cdot 45$ (čia baigiasi pirmasis triženklių skaičių šimtukas). Sudėkime gautąsias sumas:

$$1 \cdot 1 \cdot 45 + 1 \cdot 2 \cdot 45 + \cdots + 1 \cdot 9 \cdot 45 = 1 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 45 = 1 \cdot 45 \cdot 45.$$

Analogiškai sumuodami skaičių nuo 200 iki 299 skaitmenų sandaugas gausime sumą $2 \cdot 45 \cdot 45$. Toliau eina suma $3 \cdot 45 \cdot 45$ ir t. t. Skaičiams nuo 900 iki 999 gauname sumą $9 \cdot 45 \cdot 45$. Galutinė suma yra

$$1 \cdot 45 \cdot 45 + 2 \cdot 45 \cdot 45 + \cdots + 9 \cdot 45 \cdot 45 = (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 45 \cdot 45 = 45 \cdot 45 \cdot 45 = 45^3.$$

Teisingas atsakymas **C**.

J29. Ⓑ 5-ojo

! Palyginkime bet kuriuos du gretimus stulpelius — k-ąjį ir $(k+1)$-ąjį, čia $1 \leqslant k \leqslant 14$. Dešiniojo stulpelio tose pačiose eilutėse esantys skaičiai yra vienetu didesni nei kairiojo, bet kairiajame yra vienu skaičiumi daugiau: 1-ajame stulpelyje yra $16 - 1 = 15$ skaičių, 2-ajame — $16 - 2 = 14$ skaičių, ..., k-ajame — $(16 - k)$ skaičių, $(k+1)$-ajame — $(16 - (k+1))$ skaičių. Tas papildomas k-ojo stulpelio skaičius yra lentelės įstrižainėje. Kam jis lygus? 1-ajame stulpelyje turime skaičių 1, 2-ajame — skaičių $1 + 2 = 3$, 3-ajame — skaičių $1 + 2 + 3 = 6$, ..., k-ajame — skaičių $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Taigi jei k-ajame stulpelyje turime skaičių $\frac{k(k+1)}{2}$ ir dar $(15 - k)$ skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{15-k}$, tai $(k+1)$-ajame turime $(15 - k)$ skaičių $x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots, x_{15-k} + 1$. Dviejų stulpelių skaičių sumų skirtumas lygus

$$\frac{k(k+1)}{2} + x_1 + x_2 + \cdots + x_{15-k} - (x_1 + 1 + x_2 + 1 + \cdots + x_{15-k} + 1) = \frac{k(k+1)}{2} - (15 - k) = \frac{k^2 + 3k - 30}{2}.$$

Belieka išsiaiškinti, kada šis skirtumas yra teigiamas, o kada neigiamas.
Pasirenkant k reikšmę, nesunku pastebėti, kad jei $1 \leqslant k \leqslant 4$, tai $k^2 + 3k - 30 \leqslant 4^2 + 3 \cdot 4 - 30 = -2 < 0$. Todėl 1-ojo stulpelio skaičių suma mažesnė nei 2-ojo, 2-ojo nei 3-ojo, 3-ojo nei 4-ojo ir 4-ojo nei 5-ojo. O jei $k \geqslant 5$, tai $k^2 + 3k - 30 \geqslant 5^2 + 3 \cdot 5 - 30 = 10 > 0$, todėl 5-ojo stulpelio skaičių suma didesnė nei 6-ojo, 6-ojo nei 7-ojo ir t. t. iki pat paskutinių stulpelių. Jei stulpelių skaičių sumas pažymėsime atitinkamai $S_1, S_2, \ldots, S_{15}$, tai $S_1 < S_2 < S_3 < S_4 < S_5 > S_6 > S_7 > \cdots > S_{15}$. Vadinasi, S_5 yra didžiausia iš sumų.
Teisingas atsakymas **B**.

J30. Ⓒ 10

! Jei kuri nors iš išvestų atkarpų sutampa su aštuonkampio kraštine, tai aštuonkampis bus padalytas į daugiausiai dvi dalis. Todėl Lauros pasirinkta viršūnė nėra H, o Violetos pasirinktoji nėra C. Be to, išvestos atkarpos negali kirstis aštuonkampio viduje — kitaip gautume keturias dalis. Visos kitos galimybės tinka — jas belieka tiesiog išvardinti (siūlome skaitytojui pačiam pasibraižyti atitinkamus eskizus). Kai Laura pasirenka viršūnę C, Violetai nelieka jokios tinkamos viršūnės. Kai Laura renkasi D, Violeta turi vieną galimybę — taip pat rinktis D. Kai Laura renkasi E, Violetai yra 2 galimybės — D ir E. Kai Laura renkasi F, Violetai yra 3 galimybės — D, E ir F. Kai Laura renkasi G, yra 4 galimybės — D, E, F ir G. Iš viso gauname $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ padalijimų.
Teisingas atsakymas **C**.

SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. Ⓔ 13

Horizontali tiesė ties 30 cm padala kerta grafiką keturiuose taškuose (4; 30), (11; 30), (14; 30), (20; 30). Vandens lygis viršija 30 cm tarp 4 ir 11 bei tarp 14 ir 20 valandų. Iš viso gauname $(11-4)+(20-14)=7+6=13$ valandų.
Teisingas atsakymas **E**.

S2. Ⓑ $\sqrt{2}$

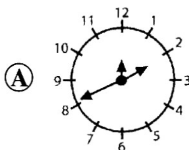
Pertvarkykime skaitinį reiškinį:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = (2\cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (2^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

(Pastebėkime, kad kiti atsakymai 2^0, $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{2}{3}}$, 2^1 netinka.)
Teisingas atsakymas **B**.

S3. Ⓒ 5

Tris vidurinius skaičius pažymėkime iš eilės a, b, c. Gauname lygtis $2ab=30$, $abc=90$, $12bc=360$, arba $ab=15$, $abc=90$, $bc=30$. Sudauginkime pirmąją ir trečiąją lygtis ir padalinkime rezultatą iš trečiosios: $\frac{ab\cdot bc}{abc}=\frac{15\cdot 30}{90}$ arba $b=5$. (Iš čia $a=3$ ir $c=6$.)
Teisingas atsakymas **C**.

S4. Ⓐ 

Vidutinio ilgio rodyklė yra valandinė — uždavinio paveikslėlyje ji rodo už beveik 5 minučių išmušiant pirmą valandą. Ilgiausia rodyklė yra minutinė — ji rodo kiek daugiau nei 55 minutes. Trumpiausia sekundinė rodyklė rodo 30 sekundžių. Taigi teisingame atsakyme vidutinio ilgio rodyklė turi rodyti kiek daugiau nei 8 valandas — taip yra atsakymuose **A** ir **B**.
Ilgiausia rodyklė turi rodyti 10 minučių (ties padala 2), o trumpiausia — 0 sekundžių (ties padala 12). Taip yra tik atsakyme **A**.
Teisingas atsakymas **A**.

S5. Ⓒ $32\,\text{cm}^2$

Brėžinys perša mintį, kad figūros $ABNM$ ir $AD'MN$ (o todėl ir $CDMN$) yra lygios, tad natūralu spėti, kad ieškomas plotas lygus pusei viso stačiakampio ploto $\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 4 = 32\,(\text{cm}^2)$. Tik kaip tai įrodyti?
Vienas būdas pateiktas uždavinio **J22** sprendime. Čia mums užteks paprastesnio pagrindimo. Pastebėkime, kad tiesės AM ir BN yra lygiagrečios. Taip pat ir tiesės $D'M$ bei AN. Vadinasi, ir atitinkamų tiesių sudaromi kampai lygūs: $\angle BNA = \angle AMD'$. Kita vertus, $\angle ABN = \angle AD'M$ kaip statieji. Tada turime ir trečią trikampių ABN ir $AD'M$ atitinkamų kampų porą $\angle BAN = 90^\circ - \angle BNA = 90^\circ - \angle AMD' = \angle D'AM$. Pagaliau $AB = AD' = 4\,(\text{cm})$. Todėl trikampiai ABN ir $AD'M$ yra lygūs pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Žinoma, lygūs trikampiai yra lygiapločiai. Taigi lygiapločiai yra ir keturkampiai $ABNM$ bei $AD'MN$, sudaryti iš tų trikampių ir bendros dalies AMN. Kartu šie keturkampiai sudaro visą lapelį, todėl kiekvieno iš jų plotas lygus $32\,\text{cm}^2$, kaip ir spėjome pradžioje.
Teisingas atsakymas **C**.

S6. Ⓐ 0

! Sprendimas visiškai analogiškas uždavinio **J6** sprendimui: jei devyni žmonės sudėjo pintinėn 8 obuolius, tai vienas iš jų neįdėjo nė vieno obuolio, t. y. bent vienas iš skaitmenų yra 0. Todėl ir visų skaitmenų sandauga lygi 0.
Teisingas atsakymas **A**.

S7. Ⓓ 11

! Turėdami reikalą su teigiamais skaičiais, galime nebijoti iš abiejų pusių ištraukti 100-ojo laipsnio šaknį: nelygybė ekvivalenti nelygybei $\sqrt[100]{n^{200}} < \sqrt[100]{5^{300}}$ arba $n^2 < 5^3 = 125$. Dabar nesunku matyti, kad kai $n \leqslant 11$, tai $n^2 \leqslant 121 < 125$, o kai $n \geqslant 12$, tai $n^2 \geqslant 144 > 125$. Vadinasi, didžiausia tinkama n reikšmė yra 11.
Teisingas atsakymas **D**.

S8. Ⓓ $f(x) = \frac{1}{x}$

? Visos duotos funkcijos apibrėžtos taške $x = 1$, kuriame turi galioti lygybė $f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{f(1)}$, t. y. $f^2(1) = 1$ arba $f(1) = \pm 1$. Įstatykime $x = 1$ į duotas funkcijas:
A) $f(1) = 2$ **B**) $f(1) = \frac{1}{2}$ **C**) $f(1) = 2$ **D**) $f(1) = 1$ **E**) $f(1) = 2$.
Iš karto matome, kad tinka tik atsakymas **D**.
Renkamės atsakymą **D**.

! Patikriname atsakymą **D** visiems $x \neq 0$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ ir $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
Teisingas atsakymas **D**.

S9. Ⓔ $x < -8$

? Pakanka pastebėti, kad nelygybes tenkina visi moduliu pakankamai dideli neigiami skaičiai. Pvz., $x = -1000$. Nelygybės **A–D** šiai x reikšmei negalioja.
Renkamės atsakymą **E**.

! Griežtai išspręsime abi nelygybes, jas užsirašę skyriumi. Nelyginio laipsnio šaknį visada galima ištraukti iš abiejų nelygybės pusių, todėl $x^3 < 64$ reiškia $x < \sqrt[3]{64} = 4$. Su kvadratine šaknimi turime būti atsargesni. Kai $x > 0$, tai nelygybė $x^2 > 64$ ekvivalenti $x > 8$. Bet kai $x < 0$, iš tos pačios nelygybės gauname $x < -8$. Sujunkime gautus rezultatus: arba $x < 4$ ir $x > 8$, arba $x < 4$ ir $x < -8$. Pirmoji galimybė prieštaringa, o antroji tiesiog reiškia, kad $x < -8$ — ši nelygybė ir aprašo visus pradinių nelygybių sprendinius.
Teisingas atsakymas **E**.

S10. Ⓒ 36°

! Žvaigždės „taisyklingumas“, žinoma, reiškia vidinio penkiakampio taisyklingumą. Visi to penkiakampio kampai lygūs. Jų visų suma lygi pagal formulę $180^\circ \cdot (n-2) = 180^\circ \cdot (5-2) = 540^\circ$, o kiekvienas iš jų tada lygus $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Tada trikampio — žvaigždės „spindulio“ — kampai yra $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ ir α. Vadinasi, $\alpha = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima pasinaudoti ir tuo, kad taisyklingosios žvaigždės „spindulių“ viršūnės yra taisyklingojo penkiakampio viršūnės, tolygiai išdėstytos viename apskritime. Ieškomas kampas α remiasi į apskritimo lanką, sudarantį penktadalį apskritimo, ir lygus $\frac{1}{5} \cdot 180^\circ = 36^\circ$.

S11. Ⓐ 240

! Skaičiaus 5 laipsniai yra 5, 25, 125, ..., o skaičiaus 2 laipsniai yra 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... Jono amžius tegali būti 25, o Petro — 16, 32 arba 64. Visų skaitmenų suma bus nelyginė, tik kai Petro amžius yra 64 ($2 + 5 + 6 + 4 = 17$). Skaitmenų sandauga tada lygi $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 240$.
Teisingas atsakymas **A**.

S12. Ⓓ 20 %

! Performuluokime uždavinio teiginį: kiekvienoje ekskursijoje **ne**dalyvavo 20 % turistų. Todėl bent vieną iš keturių ekskursijų praleido **daugiausiai** 20 %+20 %+20 %+20 % = 80 % turistų. Vadinasi, visose ekskursijose dalyvavo **mažiausiai** 100 % − 80 % = 20 % turistų. Iš kitos pusės, šiuos 20 % galima pasiekti. Suskirstykime turistus į 5 lygias grupes (tarkime, 50 turistų į grupes po 10 turistų) ir pažymėkime jas A, B, C, D, E. Į kiekvieną iš keturių ekskursijų tegu atitinkamai eina grupės 1) A, B, C, D; 2) A, B, C, E; 3) A, B, D, E; 4) A, C, D, E . Kiekvienoje ekskursijoje sudalyvautų 80 % turistų (4 grupės iš 5), o visose — 20 % turistų (1 grupė A iš 5).
Teisingas atsakymas **D**.

S13. Ⓐ $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

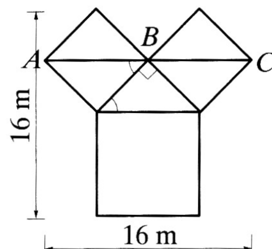
? Niekada nepakenks (ir net padės geriau suprasti uždavinį) galimų x reikšmių spėliojimas. Pvz., $x = 0$ netenkina nelygybės, todėl iš karto galime atmesti atsakymus **B**, **D** ir **E**. O reikšmė $x = -1$ nelygybę tenkina, todėl netinka ir atsakymas **C**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Išspręskime nelygybę. Modulis $|x|$ yra lygus x, kai $x \geqslant 0$ ir $-x$, kai $x < 0$. Modulis $|x-3|$ yra lygus $x-3$, kai $x \geqslant 3$, ir $3-x$, kai $x < 3$. Taip gauname tris atvejus.
1) Tegu $x < 0$. Tada (tuo labiau) $x < 3$ ir nelygybė virsta nelygybe $(-x) + (3-x) > 3$, kurią jau nesunku išspręsti. Gauname $3 - 2x > 3$, o tada $x < 0$. Vadinasi, visos reikšmės $x \in (-\infty; 0)$ tinka.
2) Tegu $0 \leqslant x < 3$. Nelygybė virsta nelygybe $x + (3-x) > 3$ arba $3 > 3$. Nelygybė sprendinių neturi.
3) Tegu $x \geqslant 3$ (tuo labiau $x \geqslant 0$). Gauname $x + (x-3) > 3$ arba $2x > 6$. Vadinasi, kai $x \geqslant 3$, tai $x > 3$, t. y. $x \in (3; +\infty)$.
Apjunkime atvejus: $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.
Teisingas atsakymas **A**.

S14. Ⓒ Mergaičių buvo dvigubai daugiau nei berniukų

! Berniukų skaičių pažymėkime b, o mergaičių — m. Berniukų gautų pažymių sumą pažymėkime B, o mergaičių — M. Dabar galime užrašyti tris lygtis: $\frac{B}{b} = 3{,}6$; $\frac{M}{m} = 4{,}2$; $\frac{B+M}{b+m} = 4$. Šiose lygtyse eliminuokime B ir M, kad gautume ieškomą sąryšį vien tarp b ir m: $4(b+m) = B + M = 3{,}6b + 4{,}2m$ arba $0{,}4b = 0{,}2m$. Randame $b : m = 1 : 2$ — mergaičių buvo dvigubai daugiau nei berniukų.
Teisingas atsakymas **C**.

S15. Ⓒ 144 m^2



! Pažymėkime taškus, kaip parodyta paveikslėlyje. Intuityviai aišku, kad atkarpa AC lygiagreti dviem didžiojo kvadrato kraštinėms. Tai nesunku ir įrodyti. Pažymėkime mažųjų kvadratų kraštinės ilgį a m, o didžiojo — b m. Stačiojo trikampio statiniai lygūs a m, todėl jis lygiašonis, ir jo kampai prie pagrindo lygūs 45°. Dabar atkarpos AB lygiagretumas stačiojo trikampio įžambinei akivaizdus pagal pažymėtus lygius priešinius kampus. Tas pats galioja ir atkarpai BC. Todėl $AC = 16$ (m). Iš kitos pusės, $AB = BC = \sqrt{2}a$ m. Iš lygties $2\sqrt{2}a = 16$ randame $a = 4\sqrt{2}$ (m). Pagal Pitagoro teoremą, stačiojo trikampio įžambinė $b = \sqrt{2}a = 8$ (m). Vadinasi, mažųjų kvadratų plotai lygūs $a^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$ (m^2), stačiojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2}a \cdot a = 16$ (m^2), o didžiojo kvadrato plotas yra $b^2 = 8^2 = 64$ (m^2). Bendras rožyno plotas lygus $32 + 32 + 16 + 64 = 144$ (m^2).
Teisingas atsakymas **C**.

S16. Ⓓ 37

! Pastebėkime, kad didelis skaičius 857 neturėtų labai skirtis nuo pirmos eilės vietų numerių sumos. Jei tų vietų yra n, tai skaičius 857 viršija sumą $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, bet ne daugiau nei per n. Pasinaudokime tuo, kad galėtume įvertinti n:

$$\frac{n(n+1)}{2}<857\leqslant\frac{n(n+1)}{2}+n.$$

Bandykime įvairias n reikšmes ir kaipmat pastebėsime, kad jei $n\geqslant 41$, tai $\frac{n(n+1)}{2}\geqslant\frac{41\cdot 42}{2}=41\cdot 21=41(20+1)=820+41=861>857$. Jeigu $n\leqslant 39$, tai $\frac{n(n+1)}{2}+n\leqslant\frac{39\cdot 40}{2}+39=39\cdot 20+39=780+39=819<857$. Vadinasi, $n=40$. Dabar nesunku rasti dusyk parduotos vietos numerį. Jis lygus $857-\frac{n(n+1)}{2}=857-\frac{40\cdot 41}{2}=857-20\cdot 41=857-820=37$.
Teisingas atsakymas **D**.

S17. Ⓔ $\frac{ab}{a+c}$

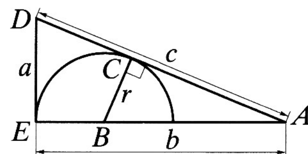
! Uždavinys sprendžiamas analogiškai uždaviniui **J15**. Tereikia vietoj skaičių 5, 12 ir 13 rašyti a, b ir c. Pritaikę Pitagoro teoremą trikampiui, kurio kraštinės yra r, $b-r$ ir $c-a$, gauname lygtį $r^2+(c-a)^2=(b-r)^2$ ir suprastiname ją: $r^2+c^2-2ac+a^2=b^2-2br+r^2$, $2br=b^2+2ac-c^2-a^2$, $2br=(c^2-a^2)+2ac-c^2-a^2$ (vėl pasinaudojome Pitagoro teorema $c^2=a^2+b^2$), $r=\frac{a(c-a)}{b}$. Gautas atsakymas nesutampa nė su vienu iš duotųjų (nors ir panašus į atsakymą **A**). Nepaisant to, jis yra lygus vienam iš jų:

$$r=\frac{a(c-a)}{b}=\frac{ab(c-a)}{b^2}=\frac{ab(c-a)}{c^2-a^2}=\frac{ab(c-a)}{(c-a)(c+a)}=\frac{ab}{c+a}$$

(vėl pasinaudojome Pitagoro teorema).
Teisingas atsakymas **E**.

!! Jei nesugebėtume, pirmojo sprendimo pabaigoje prilyginti gautojo reiškinio atsakymui **E**, patektume į aklavietę. Kaip šios sudėtingos vietos išvengti? Galimas kitas, greitesnis, sprendimas (kuris tinka ir uždaviniui **J15**).

Pažymėkime taškus kaip ir uždavinyje **J15** (žr. pav.). Pastebėkime, kad trikampiai ABC ir ADE turi po statųjį kampą ir bendrą smailųjį kampą A, todėl šie trikampiai turi lygius kampus ir yra panašūs. Vadinasi, $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ arba $\frac{a}{r}=\frac{c}{b-r}$. Iš šios lygybės išreiškę r, iš karto gauname lygybę $r=\frac{ab}{a+c}$. (Jau žinome, kad ši išraiška nėra vienintelė, todėl dėl visa ko patikriname kitus atsakymus — jie visi blogi, kai, pvz., $a=5$, $b=12$ ir $c=13$.)



S18. Ⓑ $\frac{4}{5}$

! Per tašką G išveskime bendrą statmenį atkarpoms AB ir CD. Tegu jis kerta AB taške H, o CD — taške K. Atkarpa GH yra trikampio BEG aukštinė, o jo kraštinė $BE=\frac{AB}{2}=1$, todėl ieškomas plotas $S=\frac{1}{2}BE\cdot GH=\frac{1}{2}GH$. Kaip rasti GH ilgį? Žinoma, $HK=AD=2$. Taigi $GH=HK-GK=2-GK$. Dabar GK ilgį rasime iš trikampių CGK ir CFD panašumo (jie panašūs kaip turintys lygius kampus — po statųjį ir vieną bendrą smailųjį). Visų pirma, $\frac{GK}{FD}=\frac{CG}{CF}$. Pastebėkime, kad $FD=\frac{1}{2}AD=1$, o $CF=CG+GF=CG+\frac{3}{2}CG=\frac{5}{2}CG$. Vadinasi, $GK=\frac{GK}{FD}=\frac{CG}{CF}=\frac{CG}{\frac{5}{2}CG}=\frac{2}{5}$, $GH=2-GK=2-\frac{2}{5}=1\frac{3}{5}$, o $S=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}\cdot 1\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$.
Teisingas atsakymas **B**.

S19. Ⓒ $4\sqrt{3}$

! Rodyklė, judėdama pastoviu greičiu, per tokį patį laiką pasisuka tuo pačiu kampu. Tarp dvylikos padalų yra dvylika intervalų, kuriuos rodyklė turi nueiti per tą patį laiką, todėl nuo vienos padalos iki kitos rodyklė pasisuka $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ kampu. Padalą 12 pažymėkime A, padalą 1 — B, padalą 2 — C, o ciferblato centrą, vienodai nutolusį nuo priešingų stačiakampio kraštinių, — O. Žinome, kad $OA = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6\,(\text{cm})$, $\angle AOB = \angle BOC = 30^\circ$. Raskime stačiojo trikampio OAB statinį AB:

$$\frac{AB}{AO} = \operatorname{tg}\angle AOB = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ir} \quad AB = \frac{\sqrt{3}}{3}AO = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 = 2\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

Panašiai randame AC:

$$\frac{AC}{AO} = \operatorname{tg}\angle AOC = \operatorname{tg}(\angle AOB + \angle BOC) = \operatorname{tg}(30^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$$

ir

$$AC = \sqrt{3}AO = 6\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

(Neprisimindami tangento reikšmių, galime „išsisukti" ir kitaip — per sinuso, kosinuso reikšmes, Pitagoro teoremą, per tai, kad statinis prieš 30° kampą lygus pusei įžambinės.) Pagaliau $x = BC = AC - AB = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,(\text{cm})$.
Teisingas atsakymas **C**.

S20. Ⓔ 2012 akučių gauti neįmanoma

! Bandykime įvertinti kauliukų skaičių eilėje. Kiekvienas kauliukas žvelgia išorėn keturiomis sienelėmis, iš kurių galima sudaryti dvi priešingų sienelių poras. Be to, du kraštiniai kauliukai turi po dar vieną papildomą išorinę sienelę. Jei turime n kauliukų, tai išorinių sienelių turime $4n + 2$. Be to, $4n$ sienelių galime suskirstyti į $2n$ priešingų sienelių porų. Kiekviena sienelių pora turi 7 akutes — iš viso gausime $7 \cdot 2n = 14n$ akučių, neskaitant tų, kurios yra dviejose papildomose sienelėse. O jose gali būti nuo $1 + 1 = 2$ iki $6 + 6 = 12$ akučių. Vadinasi,

$$14n + 2 \leqslant 2012 \leqslant 14n + 12.$$

Išsireikškime n:

$$n \leqslant \frac{2012 - 2}{14} < 144 \quad \text{ir} \quad n \geqslant \frac{2012 - 12}{14} > 142.$$

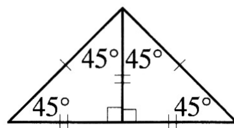
Todėl $n = 143$.
Natūralu rinktis atsakymą **D**. Bet neskubėkime. Mes tik įrodėme, kad JEIGU pavyko gauti 2012 akučių, tai kauliukų turi būti 143. Tačiau lieka atsakymas **E**. Jo mes dar neatmetėme. Įtartina, kad nepasinaudojome uždavinio sąlyga apie tai, kokiomis sienelėmis gali būti glaudžiami kauliukai. Be to, nieko konkretaus nežinome apie papildomas sieneles, o jos negali būti bet kokios.
Jei vienoje iš tų papildomų sienelių yra k akučių, tai jai priešingoje kraštinio kauliuko sienelėje yra $7 - k$ akučių. Tiek jų yra ir su ja suglaustoje 2-ojo kauliuko sienelėje, o jai priešingoje — vėl $(7 - (7 - k)) = k$ akučių. 3-ojo kauliuko atitinkamose sienelėse vėl bus k ir $(7 - k)$ akučių, 4-ojo — $(7 - k)$ ir k, ir t. t. Paskutinio, 143-ojo, kauliuko sienelėse bus k ir $(7 - k)$ akučių. Vadinasi, jei vienoje iš papildomų sienelių yra k akučių, tai kitoje jų yra $(7 - k)$. Dar kartą susumuokime visas akutes:

$$2012 = 14n + k + (7 - k) = 14 \cdot 143 + 7.$$

Lygybė neteisinga (dešinė pusė dalijasi iš 7 ir yra nelyginė, o kairė — lyginė ir iš 7 nesidalija), todėl 2012 akučių gauti nepavyks.
Teisingas atsakymas **E**.

S21. (E) 45°

45° kampą gauti nesunku (žr. pav.). Įrodysime, kad tai ir yra atsakymas — mažesnio kampo gauti nepavyks.



Nemažindami bendrumo, laikykime, kad pusiaukraštinė išvesta iš viršūnės C (žr. pav.) ir kad $\angle CDB \geqslant \angle CDA$ (čia D yra atkarpos AB vidurio taškas). Kadangi $\angle CDA + \angle CDB = 180°$, tai $\angle CDB \geqslant 90°$. Du iš lygiašonio trikampio BCD kampai yra lygūs. Kampas CDB negali būti vienas iš jų — kitaip visų trikampio kampų suma viršytų $90°+90° = 180°$. Vadinasi, $\angle BCD = \angle CBD$ ir $DB = DC$. Tačiau $DB = \frac{1}{2}AB = AD$, todėl $DC = DA$ ir $\angle ACD = \angle CAD$. Prisiminkime, kad ir trikampis ABC yra lygiašonis. Kadangi $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle CBD = \angle CAB + \angle CBA$, tai $\angle ACB \neq \angle CAB$ ir $\angle ACB \neq \angle CBA$. Lieka vienintelė galimybė: $\angle CAB = \angle CBA$ ir $CA = CB$. Bet tokiu atveju pusiaukraštinė CD, išvesta į lygiašonio trikampio pagrindą, yra ir aukštinė. Vadinasi, lygiašoniai trikampiai ACD ir BCD yra statieji (kiekvieno jų kampai yra 90°, 45°, 45°), ir mes gavome situaciją, pavaizduotą viršutiniame paveikslėlyje.
Teisingas atsakymas **E**.

S22. (A) 8
Žr. Junioro 21 uždavinio sprendimą.

S23. (D) 113

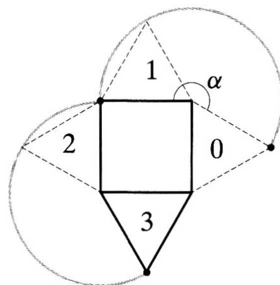
Tarkime, kad atlikta k operacijų 1) ir $n-k$ operacijų 2). Tada gautoji trupmena lygi $\frac{7+8k}{8+7(n-k)} = \frac{7}{8}$. Pertvarkykime lygybę:

$$8(7+8k) = 7(8+7(n-k)), \quad 56+64k = 56+49n-49k, \quad 49n = 113k.$$

$\text{DBD}(113, 49) = 1$, nes 113 iš 7 nesidalija, todėl n dalijasi iš 113. Vadinasi, $n \geqslant 113$. Situacija su $n = 113$ galima. Turime imti $k = \frac{49}{113}n = 49$ ir atlikti 49 operacijas 1) bei $113 - 49 = 64$ operacijas 2). Tada gausime norimą trupmeną $\frac{7+8\cdot 49}{8+7\cdot 64} = \frac{7(1+8\cdot 7)}{8(1+7\cdot 8)} = \frac{7}{8}$.
Teisingas atsakymas **D**.

S24. (B) $\frac{28}{3}\pi$

Atlikime pirmus tris trikampio posūkius aplink kiekvieną iš jo viršūnių ir pavaizduokime gautąją taško trajektoriją (pirmuoju posūkiu nubrėžiamas apskritimo lankas, antrojo posūkio metu taškas nejuda, o trečiuoju posūkiu gaunamas dar vienas toks pat lankas). Matome, kad trikampis ir taškas atsidūrė toje pačioje pozicijoje kvadrato atžvilgiu, bet ne iš dešinės, o iš apačios. Po dar trijų ėjimų jie tokiu pat būdu atsidurs iš kairės, tada iš viršaus ir pagaliau vėl iš dešinės, t. y., pradinėje padėtyje. Visą trajektoriją sudarys keturios linijos, kiekviena sudaryta iš dviejų apskritimo lankų; iš viso — aštuoni lankai.



Raskime pirmojo iš jų ilgį (kiti yra to paties ilgio — jie skiriasi tik savo padėtimi kvadrato atžvilgiu). Apskritimo centras yra kvadrato viršūnėje, o spindulys lygus 1. Visas apskritimo perimetras lygus $2\pi r = 2\pi$, o jo lanko ilgis lygus $\alpha r = \alpha$ (čia α yra pažymėtasis kampas). Matome, kad pilnąjį kampą sudaro kampas α, kvadrato kampas $\frac{\pi}{2}$ ir lygiakraščio trikampio kampas $\frac{\pi}{3}$. Todėl $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi$. Gauname bendrą trajektorijos ilgį $8\alpha = 8 \cdot \frac{7}{6}\pi = \frac{28}{3}\pi$.
Teisingas atsakymas **B**.

S25. Ⓓ 16

! Apsimoka užsirašyti

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = x_2(x_1 + x_3) + x_4(x_1 + x_3) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4).$$

Tvarkas galima skaičiuoti taip. Skaičiui 2 prilyginame bet kurį iš keturių skaičių x_1, x_2, x_3, x_4 (tai padaryti yra keturi būdai). Tarkime, $x_i = 2$. Tegu gautame reiškinyje x_i yra vienuose skliaustuose su x_j. Jei $x_j = 1$ arba $x_j = 4$, tai $x_i + x_j$, o todėl ir visas reiškinys, dalijasi iš 3 ($2+4 = 6$, $2+1 = 3$). O jei $x_j = 3$, tai neišvengiamai turime mums netinkančią situaciją $(2 + 3)(1 + 4) = 25$. Taigi x_j galime pasirinkti dviem būdais. Tada mums tereikia laisvai (nes dalumą iš 3 jau užsitikrinome) likusius du skaičius (3 ir 1 arba 3 ir 4) prilyginti likusiems dviems nežinomiems x_k ir x_l. Tai galima padaryti 2 būdais ($x_k = 3$ arba $x_l = 3$). Taip gauname iš viso $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ skirtingų tvarkų.
Teisingas atsakymas **D**.

S26. Ⓓ 2012

! Kadangi uždavinyje klausiama apie algebrines taškų savybes (jų koordinates), tai iš karto ir spręskime jį algebriškai. Tiesė, lygiagreti tiesei $y = x$, turės tą patį krypties koeficientą $k = 1$, t. y. jos lygtis bus $y = x + b$, čia b — koks nors realusis skaičius. Kad nubrėžtosios tiesės kiekviena kerta parabolę dviejuose taškuose, algebriškai reiškia, jog atitinkamos lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = x + b, \\ y = x^2 \end{cases}$$

turi po du skirtingus sprendinius $(x; y)$. Eliminuokime y. Sistema turės du sprendinius, tik jei kvadratinė lygtis $x + b = x^2$ turės dvi skirtingas šaknis x_1 ir x_2 (jos ir bus dviejų sankirtos taškų abscisės). Mums rūpi tų abscisių suma, bet juk $x_1 + x_2$ galima rasti pagal Vijeto teoremą, pritaikytą lygčiai $x^2 - x - b = 0$. Pagal šią teoremą,

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{ir} \quad x_1x_2 = -b.$$

Bet kuriai vienai tiesei gavome abscisių sumą 1. Tiesių yra 2012, todėl visų abscisių suma lygi $1 + 1 + \cdots + 1 = 2012$.
Teisingas atsakymas **D**.

S27. Ⓐ $A(4; 3; 5)$

! Lengviausias būdas išspręsti šį uždavinį yra nagrinėti ne pačių viršūnių tarpusavio padėtį, o atstumus tarp jų. Tarkime, kubo kraštinė lygi a. Kam gali būti lygus atstumas tarp kubo viršūnių? Žinoma, jei viršūnės yra tos pačios kubo briaunos galai, tai atstumas tarp jų yra a. Jei viršūnės priklauso vienai kubo sienai, bet ne vienai briaunai, tai jos yra priešingos kvadrato su kraštine a viršūnės, ir atstumas tarp jų lygus kvadrato įstrižainei $\sqrt{2}a$. Pagaliau, jei viršūnės nepriklauso vienai sienai, tai jos yra priešingos (labiausiai nutolusios) to paties kubo viršūnės. Kad rastume atstumą tarp jų, pastebėkime, kad jos yra stačiojo trikampio su statiniais a (kubo briauna) ir $\sqrt{2}a$ (kubo sienos — kvadrato — įstrižainė) įžambinės galai. Pagal Pitagoro teoremą ieškomas atstumas lygus

$$\sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$

Matome, kad atstumas kitoks būti negali.

Dabar raskime atstumus tarp duotųjų taškų:

$$PQ = \sqrt{(3-5)^2 + (4-2)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2},$$

$$PR = \sqrt{(3-1)^2 + (4-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

ir

$$QR = \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Visi trys atstumai yra skirtingi ($PQ = \sqrt{3}PR$ ir $QR = \sqrt{2}PR$), o jų juk ir tegali būti 3, todėl didžiausias iš jų PQ yra atstumas tarp priešingų kubo viršūnių. Kubo centras yra per vidurį tarp bet kurių dviejų kubo priešingų viršūnių, todėl jis yra atkarpos PQ vidurys, kurį galime rasti tiesiog sudėdami atkarpos galus ir padalindami sumą iš 2: $\frac{P+Q}{2} = (\frac{3+5}{2}; \frac{4+2}{2}; \frac{1+9}{2}) = (4; 3; 5)$. Gavome tašką A.
Teisingas atsakymas **A**.

S28. Ⓑ 3

! Šiame uždavinyje tereikia nebijoti suskaičiuoti bent kiek daugiau sekos narių:

$$1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

Pastebėkime, kad 13-asis ir 14-asis nariai sutampa su pirmuoju ir antruoju, be to, su jais ir su toliau einančiais nariais reikia atlikti tas pačias operacijas. Vadinasi, sekos nariai kartojasi kad dvyliktas. Bet kurių 12 iš eilės einančių narių suma lygi

$$1 + 1 + 0 + 1 + (-1) + 0 + (-1) + (-1) + 0 + (-1) + 1 + 0 = 0.$$

Pirmuosius $96 = 8 \cdot 12$ sekos narius galima suskirstyti į 8 tokius tuzinus, o toliau vėl eina pirmieji nariai 1, 1, 0, 1, todėl $a_1 + a_2 + \dots + a_{96} = 0$. Tada $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{96} + a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100} = a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100} = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$.
Teisingas atsakymas **B**.

S29. Ⓔ 6

! 24 skaičių sumą gausime iš visų 26 skaičių sumos atėmę skaičius a ir b, todėl

$$ab = 1 + 2 + \dots + 26 - a - b = \frac{27 \cdot 26}{2} - a - b = 351 - a - b,$$

$$ab + a + b = 351.$$

Dabar padarykime, kad kairėje pusėje esantis reiškinys galėtų būti užrašytas kaip sandauga — pridėkime prie abiejų lygybės pusių 1:

$$ab + a + b + 1 = 352, \quad (a+1)(b+1) = 352.$$

Belieka sugalvoti, kaip skaičių 352 užrašyti kaip dviejų dauginamųjų sandaugą. Nepamirškime, kad $1 \leqslant a, b \leqslant 26$. Išskaidykime 352 pirminiais dauginamaisiais: $352 = 2^5 \cdot 11$. Vadinasi, vienas iš skaičių $a + 1$ ir $b + 1$ turi dalintis iš 11. Jei tas skaičius lygus 11, tai kitas lygus $2^5 = 32 > 27$, o to negali būti. Bet jei tas skaičius yra didesnis už 22, tai jis didesnis už 27 (nes dalus iš 11), o to vėlgi negali būti. Todėl jis lygus 22, o kitas skaičius tada lygus $\frac{352}{22} = 16$. Jei $a + 1 = 22$, tai $a = 21$ ir $b = 15$. Jei $b + 1 = 22$, tai $a = 15$. Abiem atvejais $|a - b| = 6$.
Teisingas atsakymas **E**.

S30. Ⓑ 2-oji ir 2010-oji

! Iš karto aišku, kad tarp keturių paskutinių kambaryje atsidūrusių kačių viena kvaiša ir trys gudrios. Mūsų tikslas yra išsiaiškinti, kokios gali būti pirmosios keturios katės, t. y., atkurti visą kačių seką, pradėjus nuo jos pabaigos. (Pradėti nuo pirmųjų kačių nebūtų taip patogu.) Tačiau prieš tai atmeskime kombinacijas, kurios iš principo neįmanomos. Visu pirma, kadangi kambaryje atsidūrus bent trims kvailoms katėms kiekviena nauja katė nukvaištų ir trijų gudrių kačių kambaryje neatsirastų, tai kambaryje kvailų kačių niekada nebuvo daugiau nei dvi. Be to, jų negalėjo būti lygiai viena iš keturių, kitaip ši katė būtų demaskuota. Vadinasi, išskyrus paskutiniųjų kačių ketvertą, tarp keturių kačių kvailos galėjo būti tik dvi arba nei vienos. Ši taisyklė ir yra svarbiausia mūsų sprendime. Tikrinsime pirmąjį atsakymą. Jei 2011-oji katė yra kvaila, tai 2009-oji, 2010-oji ir 2012-oji turi būti gudrios. O kokia gali būti 2008-oji? Jei ji būtų gudri, tai prieš jai išeinant kambaryje būtų lygiai viena kvaila katė ir trys gudrios, o taip negali būti. Vadinasi, 2008-oji katė kvaila. Kvailas kates žymėsime raide k, o gudrias — raide g. Tada kačių seka baigiasi taip: $...kggkg$. Kokia raidė turi eiti prieš tai? Jei tai būtų g, tai gautume seką $...gkggkg$, bet kiekviename iš eilės einančiame raidžių ketverte turi būti dvi raidės k arba nei vienos. Todėl turime rašyti $...kkggkg$. Pagal šią logiką galime tęsti procesą iki pat sekos pradžios, bet tai nebūtina, nes sekos nariai ima kartotis: $...kkggkkggkkggkg$. Seką sudaro fragmentai „$ggkk$“. (išskyrus paskutinįjį „$ggkg$“). Kadangi 2012 dalijasi iš 4, tai seka ir prasidės „$ggkk$“, t. y., 1-oji ir 2-oji katė yra gudrios, o 3-oji bei 4-oji — kvailos. Vadinasi, atsakymas **A** (kaip ir atsakymas **E**) neteisingas (pastebėsime, kad atkurti kačių seką pradedant nuo 1-osios katės šiuo būdu nepavyktų).

Atsakymai **C** ir **D** atmetami panašiai. Jei 2009-oji katė kvaila, tai turime seką $...kggg$. Pratęskime ją: $...kggkkggkkggg$. Seka prasideda fragmentu „$kggk$“, todėl 3-ioji katė nėra kvaila. Jei 2012-oji katė kvaila, tai gaunama seka $gggg...gggggk$. Visos katės, išskyrus paskutiniąją, yra gudrios.

Lieka atsakymas **B**. Jis yra teisingas. Seką $...gkgg$ pratęsiame: $...gkgkgkgkgg$. Todėl seka prasideda „$gkgk$“ — 2-oji katė yra kvaila. Iš tiesų, jei tokiu būdu kvaila būtų kas antra katė, gautume uždavinyje aprašytą situaciją.

Teisingas atsakymas **B**.

ATSAKYMAI

Klausimo Nr.	Grupė	
	J	**S**
1	D	E
2	D	B
3	D	C
4	E	A
5	C	C
6	A	A
7	B	D
8	D	D
9	D	E
10	D	C
11	C	A
12	B	D
13	C	A
14	D	C
15	B	C
16	E	D
17	B	E
18	D	B
19	B	C
20	D	E
21	A	E
22	D	A
23	A	D
24	C	B
25	C	D
26	C	D
27	C	A
28	C	B
29	B	E
30	C	B